

マルチレベルモデルを用いた湖沼水質管理のためのシナリオ作成
Scenario Generation for Lake Water Quality Management
Using Multiple Level Model

○ 前田 滋哉 · 河地 利彦

○ Shigeya Maeda and Toshihiko Kawachi

1. はじめに 湖沼水質保全のための長期計画を策定するには、目標や制約を明らかにしたうえで合理的な選択肢を準備する必要がある。そこで、著者ら¹⁾は最適化手法として線形計画法を用い、河川から湖沼へ流入するCOD(化学的酸素要求量)負荷量の許容最大値を求め、それを各流入河川へ配分する最適化モデルを開発している。しかしここでは湖沼を水平2次元モデル化しており、湖沼の流速やCOD濃度の鉛直分布を考慮できない。そこで次の研究段階では、湖沼を3次元的に取り扱った上で、水理・水質環境の不確実変動を考慮した確率論的最適化モデルへ、先に提案したモデルを拡張する。本稿ではこの過程の内、長期管理をするうえで予測される特徴的な湖沼の流れ場を、マルチレベルモデル²⁾を用いてシナリオに整理する手法を報告する。

2. 支配方程式 湖沼の水流の支配方程式として、次の運動方程式と連続式²⁾を考える。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = fv - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -fu - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

ここで、 $x, y, z =$ デカルト座標(それぞれ東、北、鉛直上向が正); $t =$ 時間; $u, v, w =$ 流速ベクトルの x, y, z 成分; $\rho =$ 密度; $P =$ 圧力; $f =$ コリオリパラメータ; そして $\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yy}, \tau_{yz} =$ 乱流せん断応力である。

湖沼を鉛直方向に複数のレベルに分ける。各レベルの幾何学的な位置は水位変動に無関係で不

変としたマルチレベルモデル^{2,3)}を採用する。このとき運動方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial t} + u_j^{(k)} u_{i,j}^{(k)} \\ & + \frac{1}{h^{(k)}} \left\{ (u_i w)^{(k-\frac{1}{2})} - (u_i w)^{(k+\frac{1}{2})} \right\} \\ & + \frac{1}{\rho^{(k)}} P_{,i}^{(k)} - f \epsilon_{ij} u_j^{(k)} \\ & = \frac{1}{\rho^{(k)} h^{(k)}} \left\{ (h^{(k)} \tau_{ij,j}^{(k)}) + (\tau_i^{(k)u} - \tau_i^{(k)l}) \right\} \\ & \quad i = 1, 2; j = 1, 2; \forall k \quad (5) \end{aligned}$$

ここで上付添字 (k) はレベルの番号を表し、 $\tau_i^{(k)u}, \tau_i^{(k)l} =$ 第 k レベルの上・下面での乱流せん断応力; $h^{(k)} =$ 第 k レベルの層厚; そして $\epsilon_{ij} =$ エディントンの記号である。

表層レベル(レベル1)での連続式は

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \sum_{l=1}^b (h^{(l)} u_i^{(l)})_{,i} = 0 \quad (6)$$

となる。ここで、 $\zeta =$ 平均水位から測った水面高; $b =$ 湖底レベルのレベル番号である。また、その他のレベルでの連続式は

$$w^{(k)} = - \sum_{l=k}^b (h^{(l)} u_i^{(l)})_{,i} \quad (7)$$

と表せる。これらの式に対し、空間の離散化に有限要素法、時間の離散化に2段階陽的解法³⁾を適用し、 $u_i^{(k)}, w^{(k)}, \zeta$ を求める。

3. 最適化モデル 湖沼のレベル1に接続する河川や水路から流達するCOD負荷量の管理を想定する。最適化モデルは2目的線形計画問題として次のように表せる。

$$\text{Maximize } f_1 \quad (8)$$

subject to

(i)有限要素法を適用して離散化したCOD輸送式

$$E_s \mathbf{C}_s + G_s \mathbf{c}_s^L = \mathbf{b}_s \quad \forall s \quad (9)$$

(ii) 湖沼での COD 濃度に関する水質環境基準

$$C_s^{o(1)} \leq C^{ou(1)} \quad \forall s \quad (10)$$

(iii) 河川/水路からの流入水の COD 濃度に関する上・下限制約

$$c_{rs}^L \leq c_s^{Ll} \leq c_{rs}^L \leq c_s^{Lu}, \quad \forall r, s \quad (11)$$

(iv) ϵ 制約条件

$$f_2 \leq \epsilon \quad (12)$$

(v) 変数の非負条件

$$C_s, C_s^{o(1)}, c_s^L, c_s^{Ll}, c_s^{Lu} \geq 0, \quad \forall s \quad (13)$$

ここで

$$f_1 = \sum_{s=1}^{N_s} p_s x_s, \quad f_2 = \sum_{s=1}^{N_s} p_s (c_s^{Lu} - c_s^{Ll}) \quad (14)$$

$$x_s = \sum_{r=1}^{N_r} B_r q_{rs}^L c_{rs}^L \quad \forall s \quad (15)$$

$$q_{rs}^L = (h_{rs}^{(1)} + \zeta_{rs}) \sqrt{(\hat{u}_{1rs}^{(1)})^2 + (\hat{u}_{2rs}^{(1)})^2} \quad \forall r, s \quad (16)$$

上付添字 l, u, o は下限, 上限, 湖沼での環境基準地点をそれぞれ表し, 下付添字 r, s は流入, シナリオをそれぞれ表す. また, $N_r =$ 流入河川/水路の個数; $N_s =$ シナリオの個数; $p_s =$ シナリオ s の生起確率; $h_{rs}^{(1)} =$ 表層レベルにおける水層の基準厚; $\zeta_{rs} =$ 水面標高と湖沼平均水面標高の差; $\hat{u}_{1rs}^{(1)}, \hat{u}_{2rs}^{(1)} =$ 流入部における流速ベクトルの x, y 成分 (既知と仮定); $B_r =$ 流入部の河口/流出口の幅 (m); $C_s =$ 湖沼の COD 濃度 $C_i^{(k)}$ (g/m^3) を成分に持つベクトル; $c_s^L =$ 流入河川/水路 r の COD 濃度 c_{rs}^L (g/m^3) を成分に持つベクトル; $E_s, G_s =$ 係数行列; $b_s =$ 定数ベクトル; $c_s^{Ll}, c_s^{Lu} =$ 流入水の COD 濃度の下限値と上限値; $C_s^{o(1)} =$ 環境基準地点での表層レベルの COD 濃度を成分に持つベクトル; $C^{ou(1)} =$ COD 濃度に関する水質環境基準値を成分に持つベクトル; $c_{rs}^L =$ 流入水の COD 濃度の下限値; そして $\epsilon =$ 目的関数 f_2 の大きさを制御するパラメータである. 決定変数は c_{rs}^L であり, 最適化モデルをシンプレックス法で解くことで, 各流入河川/水路への許容 COD 負荷の配分量 $B_r q_{rs}^L c_{rs}^L$ が得られる.

4. 水理パラメータに関するシナリオ作成 滋賀県の貫川内湖へ最適化モデルを適用することを考える. 内湖を図 1 のように 3 個のレベルに分割する. 2008 年の 4 月 28 日と 5 月 8 日に, 各流入・流出部で 1 次元流速と COD 濃度を観測している. また, 同日に内湖内の Monitoring

point (図 1) で 3 次元流速と COD 濃度を観測している. これらを用いた流れ解析結果と作成したシナリオは, 講演会場にて示す.

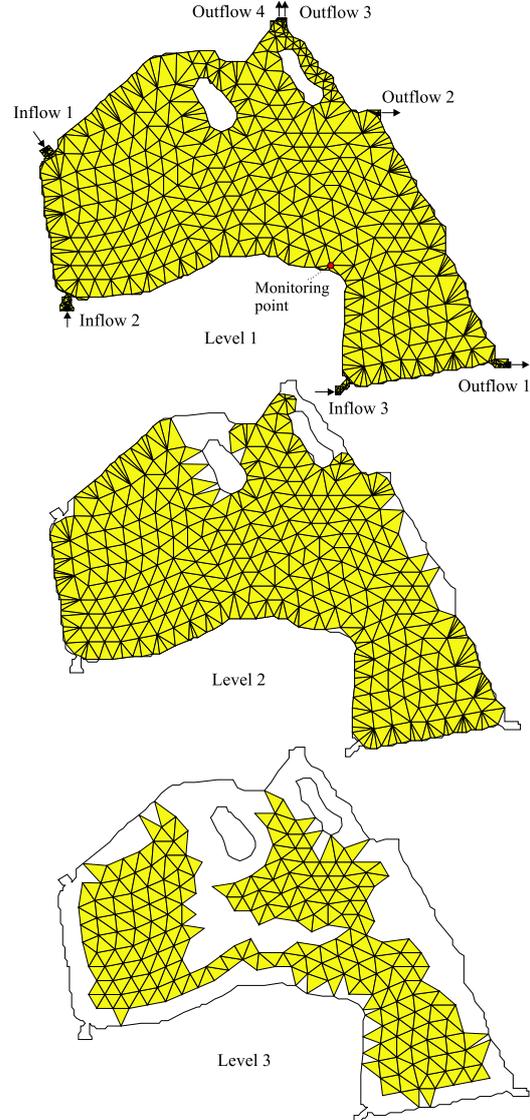


図 1 対象内湖の有限要素分割と流入・流出・内湖流速観測点位置

Fig. 1 Finite element model of lagoon and locations of inflows, outflows and monitoring point

5. おわりに 湖沼流入負荷量を制御するための確率論的最適化モデルを定式化した. また, マルチレベルモデルを用いて最適化モデルのシナリオを設定する手法を開発した.

引用文献 1) Maeda, S., Kawachi, T., Unami, K. and Takeuchi, J. (2009): Optimal allocations of maximum allowable load among influent rivers: an application for strategic management of lake water quality, *Trans. of JSIDRE*, 264, pp.1-7. 2) Leendertse, J. J. and Liu, S.-K. (1975): *A Three-Dimensional Model for Estuaries and Coastal Seas: Volume II, Aspects of Computation*, Rand, pp.3-9. 3) Kawahara, M., Kobayashi, M. and Nakata, K. (1983): Multiple level finite element analysis and its applications to tidal current flow in Tokyo Bay, *Appl. Math. Modelling*, 7, pp.197-211.