Navier-Stokes 方程式に基づく浸透流及び層流の同時解析手法の開発
Development of numerical procedure to solve seepage and laminar flow based on Navier-Stokes equations

○川並俊輔*，藤澤和謙**，村上　章*
Shunsuke Kawanami, Kazunori Fujisawa, Akira Murakami

1. はじめに
地盤内部の流体挙動は，空洞や水みちの有無により，Darcy 流れに基づく浸透流解析だけでは予測が難しく，それを正確に把握するためには，浸透流解析に加えて空洞部分において Navier-Stokes 方程式を解き，層流解析を行う必要がある。しかし，層流解析と浸透流解析を別々に行うには時間と手間がかかる。一方で，浸透流解析においても，慣性項を考慮すれば Navier-Stokes 方程式と同様の方程式を得ることができる。この性質を利用し，流体解析と浸透流解析を同時に行う手法を提案する。本報では，用いた非圧縮性流体についての数値解析手法を説明し，流体計算のベンチマーク問題としてキャビティ流れに関する数値シミュレーションを行い，計算結果の考察を行った。

2. 数値解析手法
層流解析における非定常非圧縮性流体について，非構造格子を用いた時間二次精度の有限体積法（FVM）[1)]を用いて解析を行った。支配方程式は，**表-1** に示した式(1)及び(2)で表される Navier-Stokes 方程式である。ここで，x_i は直交座標，u_i は対応する流速成分，p は圧力，Re はレイノルズ数である。格子系は，容易な計算アルゴリズムで高精度な結果を得るために，表面法線ベクトル U を加えた非スタガード格子を用いた。

支配方程式の時間積分には，SMAC 法[2)]及び Fractional Step 法[3)]を用い，式(1)の粘性項と対流項はクランク・ニコルソン法[4)]を用いて解くことで，式(3)から式(6)が得られる。ここで，Δt と上付き文字 n は計算時間間隔と時間ステップであり，$\hat{u}_i$ 及び u_i^* は SMAC 法，Fractional Step 法で仮定した中間変数である。また，$\delta\hat{u}_i = \hat{u}_i - u_i^n$ であり，$\partial/\partial n$ はセル表面での外向き法線微分，l はセル境界の長さを意味する。

式(3)と式(5)の積分を行う際，各セル境界辺の点 P_f における φ と $\partial\varphi/\partial n$ を，その辺を共有するセルでの値 (φ_1, φ_2) 及び，辺の端点での値 (φ_a, φ_b) を使って評価する（φ は任意の変数を意味し、**図-1** と式(7)～(9)を参照のこと）。ここで，P_c は境界辺とセル中心を結んだ線分の交点であり，δ_1 及び δ_2 はセル中心地から辺までの距離，θ は法線ベクトル $\mathbf{n}$ と $\mathbf{e_1}$（セル中心を結ぶ方向の単位ベクトル）とのなす角，$|\varepsilon|$ はセル表面上の中心点，$\Delta\eta$ は中心点間の距離である。

圧力勾配項 $\partial p/\partial x_i$ は式(10)で評価できるが，計算領域の境界では $\partial p/\partial n = 0$ と仮定し，式(3)～(6)に従って時間ステップの更新を行う。なお，式(3)及び式(5)では疎行列を解く必要があるが，そのソルバーにはバーゼル大学がリリースした計算プログラム PARDISO を用いた。

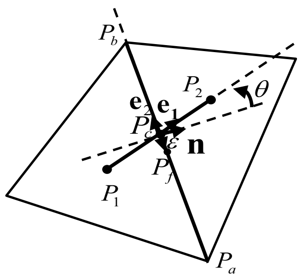

図-1　セル表面上での変数
Figure 1 Variables on cell face

3. 解析領域および計算条件
正方キャビティについて，レイノルズ数 $\mathrm{Re} = 200$，1,000 における流速計算を行った。また，x 方向及び y 方向の刻み幅 $\Delta x, \Delta y$ をそれぞれ 0.05 とし，分割数を 20×20 として，速度の境界条件については壁の内側に仮想セルを設け，接線方向にすべりなし条件 $u_i = 0$ を与えた[3)]。

*京都大学農学研究科 (Kyoto University)，**岡山大学環境生命科学研究科 (Okayama University)
浸透流解析　層流解析　有限体積法

4. 解析結果

図-2・3 は，Re= 200 ，1,000 における各時間ステップでの速度分布を示したものであり，時間ステップが経過するにつれ一次渦が形成され，レイノルズ数が大きいほどに渦の形成域が領域の下部に及び，その中心位置がキャビティの中心に近付いている。これは，レイノルズ数を構成する慣性力が増加したためと考えられる。同時に，左右下角において，小さい流速ではあるが，二次渦を確認することができた。また，どちらの場合においても，境界面における圧力振幅は確認されなかった。

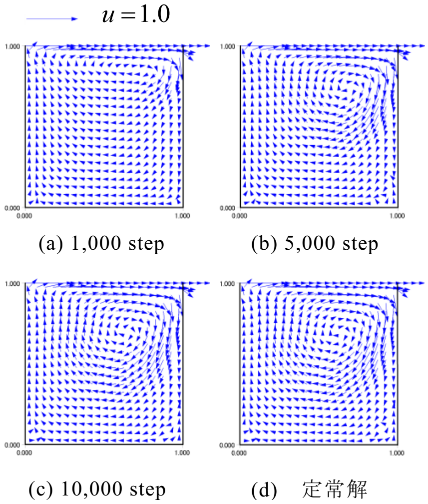

図-2 流速分布 (Re=200)
Figure 2 Velocity distribution (Re=200)

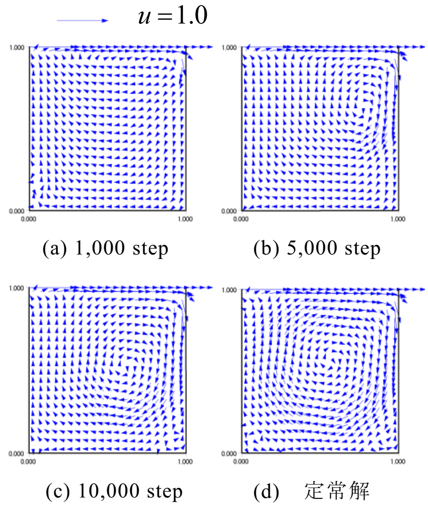

図-3 流速分布 (Re=1,000)
Figure 3 Velocity distribution (Re=1,000)

5. おわりに

FVM による数値解析手法を用いることで，キャビティ流れについて，圧力振幅の起こらない定性的に妥当な結果を得た。しかし，分割数が少なく，また，四角形格子しか用いていないため，式(7)や式(8)の右辺第二項が消去されてしまっている。そのため，より正確な流速及び圧力分布や渦の中心位置を知るためには，計算格子を細かくする必要がある。また，複雑な解析領域に対応するため三角形格子を用いた計算も検証を行う予定である。

表-1 各計算式
Table 1 Computational scheme

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}u_i u_j=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}u_i, \quad \cdots\cdots (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0, \quad \cdots\cdots (2)$$

$$\frac{\delta \hat{u}_i}{\Delta t}+\frac{1}{A}\oint_l \frac{1}{2}\left(U^n\delta\hat{u}_i+u_i^n u_j\delta\hat{u}_j+2u_i^n U^n\right)dl$$
$$=-\frac{1}{A}\oint_l \frac{1}{2}\frac{\partial p^n}{\partial x_i}dl+\frac{1}{A}\oint_l \frac{1}{2}\frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial n}\left(\delta\hat{u}_i+2u_i^n\right)dl, \quad \cdots\cdots (3)$$

$$u_i^*-\hat{u}_i=\Delta t\frac{\partial p^n}{\partial x_i}, \quad \cdots\cdots (4)$$

$$\frac{1}{A}\int_A \frac{\partial p^n}{\partial n}dA=\frac{1}{A\Delta t}\oint_l U^* dl, \quad \cdots\cdots (5)$$

$$u_i^{n+1}-u_i^*=-\Delta t\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i}, \quad \cdots\cdots (6)$$

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_{P_f}=\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\delta_1+\delta_2}-\frac{\varphi_b-\varphi_a}{\Delta\eta}\tan\theta, \quad \cdots\cdots (7)$$

$$\varphi_f=\frac{\delta_1\varphi_2+\delta_2\varphi_1}{\delta_1+\delta_2}-\frac{\varphi_b-\varphi_a}{\Delta\eta}\left|\varepsilon\right|, \quad \cdots\cdots (8)$$

$$\varphi_\alpha=\frac{\sum_{i=1}^{Ncs}\left(\varphi_i/A_i\right)}{\sum_{i=1}^{Ncs}\left(1/A_i\right)}, \quad \cdots\cdots (9)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_i}=\frac{1}{A}\int_A \frac{\partial p}{\partial x_i}dA=\frac{1}{A}\oint_l p n_i dl. \quad \cdots\cdots (10)$$

参考文献

1) D. Kim and H. Choi: A second-order time-accurate finite volume method for unsteady incompressible flow on hybrid unstructured grids, *J. Comput. Phys.* **162**, 411-428 (2000). **2)** 河村哲也：流体解析Ⅰ，朝倉書店，1996. **3)** 佐藤祐子・水上洋子・河村哲也：重合格子法を用いた回転物体周りの二次元流れの数値解析，数理解析研究所講究録，1539 巻，pp. 201-206，2007. **4)** 梶島岳夫：乱流の数値シミュレーション，養賢堂，1999.