TVD有限体積法による3次元流れ解析
3-Dimensional Flow Analysis Using TVD Finite Volume Method

宇波耕一*・河地利彦*
Koichi Unami and Toshihiko Kawachi

1. はじめに　土木工学的応用を前提とした流れ解析手法の開発に際しては，対象とする問題において本質的に重要な側面が何であるかを見極め，効率的かつ必要な精度を有するモデルを用いることが肝要である．開水路流れのモデルとしては，1次元あるいは2次元のもので十分な場合も多いが，3次元的な構造を考慮せざるを得ないときにはそれに対応した解析手法を使用することが望ましい．一般に，3次元流れの数値モデルは計算負荷が大きくなるため，何らかの仮定を置くことによってモデルの単純化を図ることが普通である．特に，静水圧分布を仮定した多層モデルはしばしば用いられている．たとえばWang[1]は，移流項に全変動減少型(TVD=Total Variation Diminishing)の差分スキームを， Smagorinskyの定式化を導入した拡散項に中心差分スキームを用いたモデルを開発している．また，Wu and Falconer[2]は水平方向と鉛直方向の取り扱いを分離した多層差分モデルの有効性を示している．ここでは，これらのモデルに準じつつ，以下のような特徴を有する簡便な有限体積法モデルの開発を試みる．

1) 座標変換を用いず，x-y-z 直交座標系上にて計算を行う．
2) 水平方向には，任意形状の非構造三角形要素分割によって領域の離散化を行う．
3) 鉛直方向には等間隔の層分割を行う．
4) Reynolds応力は速度勾配に比例するものとし，渦動粘性係数は定数と仮定する．
5) フラックスの評価はすべてTVDスキームによって行う．
6) 時間積分は陽形式によって行う．
7) 境界条件は流量境界のみを考える．

このモデルは，Zhao *et al.*[3]のような特性曲線を考慮したスキームは用いていないためRiemann問題の解を適切に近似する保証はないが，変数の連続性が期待される問題においては効率的かつ安定な求解が可能である．

2. 支配方程式　支配方程式として，非圧縮性流体の連続方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \tag{1}$$

水平方向のReynolds方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{p}{\rho}-u^2+K^h\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-uv+K^h\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(-uw+K^v\frac{\partial u}{\partial z}\right)+fv, \tag{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-uv+K^h\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{p}{\rho}-v^2+K^h\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(-vw+K^v\frac{\partial v}{\partial z}\right)-fu, \tag{3}$$

および鉛直方向の静水圧の式

$$p=\int_z^h \rho g\,dz \tag{4}$$

を用いる．ここに，tは時間，hは水位，$(u,v,w)^T$は流速ベクトル， pは圧力，ρは密度，K^hとK^vは水平方向と鉛直方向の渦動粘性係数，fはCoriolis係数である．

3. 離散化手法　対象領域は水平方向に三角形要素分割するものとし，その第i要素をΩ_iで表わす．また，Ω_iの面積をA_i，境界をΓ_iで表わす．多層モデルは，連続方程式(1)を各要素ごとに鉛直方向へ積分することにより

$$w=-\frac{1}{A_i}\int_{z_b}^{z}\int_{\Gamma_i}\left(un_x+vn_y\right)d\Gamma_i\,dz \tag{5}$$

が得られることに基礎をおく．ここに，$(n_x,n_y)^T$はΓ_i上の外向き法線ベクトル， z_bは水路底標高で，z_bにおける境界条件$w=0$が課されている．第j層において水体は高さΔz_jの区間(z_j,z_{j+1})を占めるものとし，Ω_iの第j層から第k辺を通じて流出する流量を$Q_{i,j,k}$とすれば，積分$\Delta z_j\int_{\Gamma_i}\left(un_x+vn_y\right)d\Gamma_i$は$\sum_{k=1}^{3}Q_{i,j,k}$で与えられる．$\Omega_i$における水位$h_i$の時間変化率は水面における鉛直方向流速$w$に等しいので，式(5)より離散化された連続方程式

$$\frac{dh_i}{dt}=-\frac{1}{A_i}\sum_j\sum_{k=1}^{3}Q_{i,j,k} \tag{6}$$

が得られる．さらに，式(2)，(3)は

*京都大学農学研究科，Graduate School of Agricultural Science, Kyoto University，有限体積法，3次元流れ，河川流

$$\frac{du_{i,j}}{dt} = fv_{i,j} + \frac{1}{A_i}\int_{\Gamma_i}\left(-\frac{p}{\rho}n_x + K^h\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\Gamma_i - \frac{u\sum_{k=1}^{3}Q_{i,j,k}}{A_i\Delta z_j} + \frac{1}{\Delta z_j}\left[-uw + K^v\frac{\partial u}{\partial z}\right]_{z_j}^{z_{j+1}}, \tag{7}$$

$$\frac{dv_{i,j}}{dt} = -fu_{i,j} + \frac{1}{A_i}\int_{\Gamma_i}\left(-\frac{p}{\rho}n_y + K^h\frac{\partial v}{\partial n}\right)d\Gamma_i - \frac{v\sum_{k=1}^{3}Q_{i,j,k}}{A_i\Delta z_j} + \frac{1}{\Delta z_j}\left[-vw + K^v\frac{\partial v}{\partial z}\right]_{z_j}^{z_{j+1}} \tag{8}$$

となる．ここに，$u_{i,j}$と$v_{i,j}$はΩ_iの第j層におけるuとvである．以上の離散式(6)〜(8)には，$\Omega_i \times \Delta z_j$の境界において評価すべき変数がいくつか含まれるが，それらはすべてTVDスキームによって決定する．すなわち，要素V_1と要素V_2が境界Sを介して接しているとき，未知変数UのV_1での値U_1に関する離散式

$$\frac{dU_1}{dt} = \int_S F\,dS \tag{9}$$

に対し，フラックスFは

$$F = \begin{cases} \min(F_1, F_2) & (U_1 > U_2) \\ \dfrac{F_1 + F_2}{2} & (U_1 = U_2) \\ \max(F_1, F_2) & (U_1 < U_2) \end{cases} \tag{10}$$

で与える．ここに，U_2は未知変数UのV_2での値，F_1とF_2はFのV_1とV_2での値である．

4. 計算例　開発したモデルを用い，Figure 1 (a)に示すような2箇所で横流入のある河川における流れを計算する．境界条件として，上流端からの流入流量$Q_1 = 170$ [m^3/s]，横流入流量$Q_2 = 80$ [m^3/s]と$Q_3 = 120$ [m^3/s]，下流端からの流出流量$Q_4 = 23.125(2h_{652} - h_{651} - 3.5)^2$ [m^3/s]を指定する．渦動粘性係数は，$K^h = 1.0$ [m^3/s]と$K^v = 0.016$ [m^3/s]の値を定数として与える．ほぼ定常状態となった時点での，2つの層における流速場を，Figure 1 (b)と(c)に示す．

5. おわりに　TVD有限体積法による3次元流れの数値解析手法を提示し，河川流に対する適用例を示した．このモデルに水温などの水質項目に関する移流拡散方程式を連立させて解くことも可能であり，密度流の解析に際しても有効であると考えられる．

引用文献　[1] Wang Y. Importance of subgrid-scale parameterization in numerical simulations of lake circulation, Advances in Water Resources, 2003; 26: 277-294. [2] Wu Y, Falconer RA. A mass conservative 3-D numerical model for predicting solute fluxes in estuarine waters, Advances in Water Resources, 2000; 23: 531-543. [3] Zhao DH, Shen HW, Lai JS, Tabios III GQ. Approximate Riemann solvers in FVM for 2D hydraulic shock wave modeling, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 1996; 122(12): 692-702.

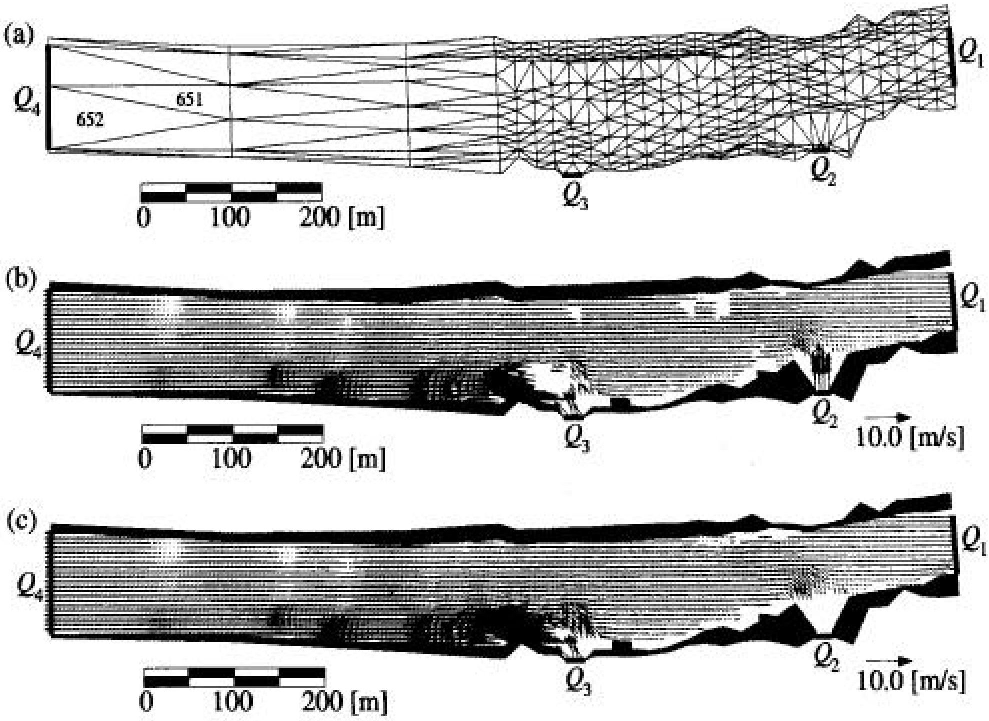

Figure 1: River flow analysis using TVD finite volume method: discretized domain (a), horizontal velocity field EL=7.25m-7.50m (b), horizontal velocity field EL=7.00m-7.25m (c).