

一様な透水性の地下水モデルを利用した時空間不均一成分の評価
Estimation of Spatiotemporal Inhomogeneity of Groundwater Flow
Based on the Model Subject of Uniform Permeability

浜口 俊雄*
Toshio HAMAGUCHI

1. はじめに

広域地下水解析では、観測データの量と質に適う範囲で単純ながら小さなモデル誤差の地下水モデルを選択する。その際、特に透水係数の空間分布がよく議論の対象となる。地盤物性は不均一な空間分布となることの方が自然であって、非正常現象ともなれば、その流動は時空間的に不均一さを増す。本稿では、解析対象を透水性一様の平面地下水モデルに言及し、不均一性の空間分布を評価して一様分布モデル解に適用した地下水流動の推定結果を示す。

2. 有限要素解の吟味

本稿では平面地下水モデルの基礎式として、線形化 Boussinesq 方程式 (1) を用いる。この弱形式を求め、空間的に離散化し、時間差分や θ 法による時間展開によって得られる有限要素方程式は式 (2)~(4) の様に表せる。 M は貯留行列、 S は透水行列と呼ばれ、後者は透水係数 k を含む。式 (2) は境界水位による縮約処理が既に施されている下で、式 (5) の様に解ける。ここで、 $\|M\|$ と $\theta\Delta t\|S\|$ の大小関係を考えながら A^{-1} を級数展開した結果が式 (6) である。式 (6) を式 (5) に代入して整理すると式 (7) が得られる。

次に、上記とは異なる空間分布を持つ透水係数 \hat{k} のモデルで、上記と同様にして解 \hat{h}_{t+1} を求める。続いて透水係数の空間分布に関する時間 $t+1$ の水位変分 $\delta h_{t+1} = h_{t+1} - \hat{h}_t$ を求める。いま検討を容易にすべく、両者に時間 t の水位を同じ状態 ($h_t = \hat{h}_t$) とおく。これにより、比較的平易に δh_{t+1} の式 (8) を得る。 S の変分 δS 、又は S^{-1} の変分 δS^{-1} が変量となっているために、透水係数の空間分布の違いが時間毎に δh_{t+1} だけ解に累積的な影響を及ぼすことがわかる。仮に、透水係数 k と \hat{k} を用いたモデルがそれぞれ真の構造とその単純化モデルを示すならば、 δh_{t+1} は逐次のモデル誤差を示していくことになる。本稿では、単純化モデルとして均一な透水係数分布となる一様モデルを考え、真の流動構造に対して δh_{t+1} を地盤統計学に基づいて推定し、真値を推定する。

3. 地盤統計学的推定によるモデル誤差補完

真値 $\phi(z, t)$ をトレンド成分 $m(z, t)$ とランダム成分 $w(z, t)$ に分解して考えれば式 (9) のようになる。ここでトレンド成分は不確定的な一定の偏り \hat{b} (定数) を持つと同時にモデル解析解 $f(z, t)$ から構成さ

$$\lambda \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k d_0 \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k d_0 \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \varepsilon \quad (1)$$

(λ : 有効間隙率, h : 水頭, k : 透水係数, d_0 : 平均水深, ε : 涵養量)

$$A h_{t+1} = B h_t + \omega_{t+\theta} \quad (\text{注: 両辺は境界水位で縮約済とする}) \quad (2)$$

$$A = \frac{1}{\Delta t} M + \theta S, \quad B = \frac{1}{\Delta t} M - (1 - \theta) S, \quad M = \int_V \lambda \phi^T \phi dV, \quad (3)$$

$$S = \int_V k d_0 \frac{\partial \phi^T}{\partial z_i} \frac{\partial \phi}{\partial z_i} dV, \quad \omega_{t+\theta} = - \int_{S_q} \hat{q} \phi^T dS + \int_V \varepsilon \phi^T dV \quad (4)$$

$$h_{t+1} = A^{-1} (B h_t + \omega_{t+\theta}) \quad (5)$$

$$A^{-1} = \begin{cases} \Delta t \left(I + \sum_{i=1}^{\infty} (-\theta \Delta t M^{-1} S)^i \right) M^{-1}, & \text{if } \|M\| > \theta \Delta t \|S\| \\ \frac{1}{\theta} \left(I + \sum_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{\theta \Delta t} S^{-1} M \right)^i \right) S^{-1}, & \text{if } \|M\| < \theta \Delta t \|S\| \end{cases} \quad (6)$$

$$h_{t+1} = \begin{cases} \left(I - \sum_{i=1}^{\infty} (-\theta)^{i-1} (\Delta t M^{-1} S)^i \right) h_t + \Delta t \left(I + \sum_{i=1}^{\infty} (-\theta \Delta t M^{-1} S)^i \right) M^{-1} \omega_{t+\theta}, & \text{if } \|M\| > \theta \Delta t \|S\| \\ \left(I + \sum_{i=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{\theta} \right)^{i+1} \left(\frac{1}{\Delta t} S^{-1} M \right)^i \right) h_t + \frac{1}{\theta} \left(I + \sum_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{\theta \Delta t} S^{-1} M \right)^i \right) S^{-1} \omega_{t+\theta}, & \text{if } \|M\| < \theta \Delta t \|S\| \end{cases} \quad (7)$$

$$\delta h_{t+1} = \begin{cases} - \sum_{i=1}^{\infty} (-\theta)^{i-1} (\Delta t)^i L_{i-1} M^{-1} \delta S (h_t + \theta \Delta t M^{-1} \omega_{t+\theta}), & \text{if } \|M\| > \theta \Delta t \|S\| \text{ and } \|M\| > \theta \Delta t \|\hat{S}\| \\ \sum_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{\theta} \right)^{i+1} \left(\frac{1}{\Delta t} \right)^i (N_{i-1} \delta S^{-1} M h_t - N_i \delta S^{-1} \omega_{t+\theta}) + \frac{1}{\theta} \delta S^{-1} \omega_{t+\theta}, & \text{if } \|M\| < \theta \Delta t \|S\| \text{ and } \|M\| < \theta \Delta t \|\hat{S}\| \end{cases} \quad (8)$$

ここに、 I : 単位行列, $L_{i-1} = \sum_{j=0}^{i-1} (M^{-1} S)^{i-j-1} (M^{-1} S)^j$,

$N_{i-1} = \sum_{j=0}^{i-1} (S^{-1} M)^{i-j-1} (\hat{S}^{-1} M)^j$, $\delta S = S - \hat{S}$, $\delta S^{-1} = S^{-1} - \hat{S}^{-1}$

$$\phi(z, t) = m(z, t) + w(z, t) \quad (\text{ここに、} z: \text{空間座標, } t: \text{時間}) \quad (9)$$

$$\eta(z) = \hat{b} + k(z)^T K^{-1} \hat{w} \quad (10)$$

$$\left(\hat{b} = \frac{\alpha^T K^{-1} \phi}{\alpha^T K^{-1} \alpha}, \quad \hat{w} = \phi - \alpha \frac{\alpha^T K^{-1} \phi}{\alpha^T K^{-1} \alpha} \right)$$

$$\phi^*(z, t) = f(z, t) + \hat{b} + k(z)^T K^{-1} \hat{w} \quad (11)$$

$$\left(m(z, t) = f(z, t) + \hat{b}, \quad w(z) = k(z)^T K^{-1} \hat{w} \right)$$

ここに、 α : 成分1が観測数だけ並ぶ定数ベクトル, ϕ : 観測値ベクトル, $k(z)$: 求める推定点と各観測点間の共分散ベクトル, K : 各観測点間の $w(z)$ の共分散行列。

*京都大学防災研究所 (Disaster Prevention Research Institute, Kyoto University)

キーワード: 地下水, 一様性, 不均一性

れると考える。また不確定成分 $\eta(z, t)$ は先の \hat{b} を一部の成分とし、その他をランダム成分で占めると捉える。いま $\eta(z, t)$ が時間に独立なものと仮定し、 $\eta(z)$ と書き改める。同じく $w(z, t)$ も $w(z)$ と改める。本稿では、 $\eta(z)$ を地盤統計モデルで評価することを考える。kriging¹⁾に基づく $\eta(z)$ の空間推定結果は式(10)となる。以上より、推定値 $\phi^*(z, t)$ は式(11)のように求められる²⁾。

4. 地下水モデルと透水係数分布

本稿ではFig.1のような仮想地下水流域に対して、左端と上方から地下水涵養を施し、数値実験を試みる。ここでは20区域からなる真の透水場をFig.2の様に用意した。実験ではまず真の状態を順解析で61日分計算し、観測点での模擬観測値を作成した。その後、拡張Kalmanフィルタ有限要素法³⁾を用いて全域等方均一な透水場であると見なしたときの最尤等価透水係数 \hat{k} を逆解析で求めた。このシステムを使うことで、 $w(z)$ が逐次フィルタリングされる。その結果 $\hat{k}=221.5426(\text{m/day})$ を得た。次に透水係数同定後のモデル解析で得られた地下水位の数値解と観測値との誤差から水位の空間不確定量を地盤統計学的に推定し、モデル解析解に補完して得られる水位解の算出を試みる。

5. モデル誤差の補完量と水位変分

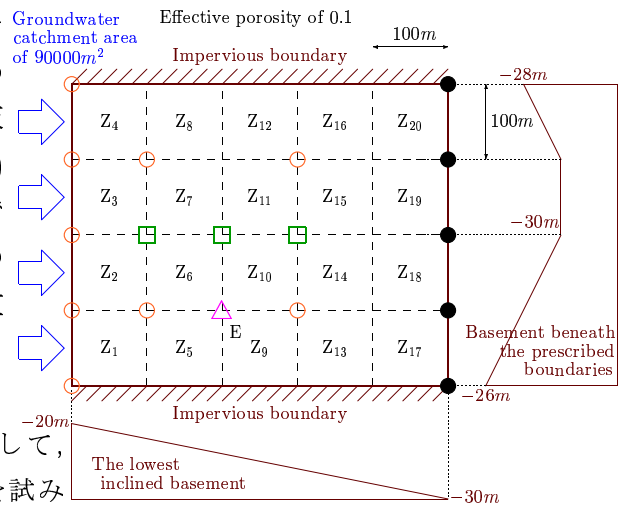
Fig.1のE点(Δ)における水位変動を一例としてFig.3に示す。ここに、実線は真の変動値、 \times 、 \circ 印は順にモデル解析解、補完モデル解を表す。 \times と \circ の差がモデル誤差の補完量を、実線と \times との差が変分 δh_t をそれぞれ示しており、不確定量を評価した良好な効果の程が伺える。不確定量を評価した結果で変分も減少して誤差が緩和されていることが分かる。本実験のように、真の透水場が不均一であっても、地盤統計学的評価を行ったモデル誤差の補完はモデル誤差減少化の効力を失わず、むしろ十分に発揮している。他の地点上でも同様の傾向が見られ、これらの実験から本稿の地盤統計学的補完モデルの有効性が確認できた。

6. 結論

本研究では、不均一な透水場を一様と見なしたモデルと真の透水場との違いによる水位変分を数式で明確化し、検討対象とした。また数値実験から、真の透水場と一様透水場の違いによる水位変分の時間的变化とともに、補完モデル解による精度向上を確認することができた。

参考文献

- 1) 浜口俊雄: 不良な計測情報下でのCokrigingによる地下水位分布の最適推定と相互相関的補間効果, 水工学論文集, 第45巻, pp.343-348, 2001. 2) 浜口俊雄: 地下水流況推定における地盤統計学的アプローチの効用, 京都大学防災研究所年報, 第44号B-2, pp.455-463, 2001 3) 例えば, 浜口俊雄・村上 章・長谷川高士: 平面解析で移動境界を考慮した地下水モデルと逆解析への応用, 土木学会論文集, No.568/III-39, pp.133-145, 1997.



● Prescribed boundaries of water level (0m)
○ Observed points of water level
□ Pumping wells (172.8m³/day)
Fig.1 Hypothetical groundwater basin
仮想地下水流域

Zone	Z ₄	Z ₈	Z ₁₂	Z ₁₆	Z ₂₀
		Z ₃	Z ₇	Z ₁₁	Z ₁₅
	Z ₂	Z ₆	Z ₁₀	Z ₁₄	Z ₁₈
	Z ₁	Z ₅	Z ₉	Z ₁₃	Z ₁₇
Exact	215.3322	255.5558	321.1791	400.0000	383.3276
	173.9983	200.0000	272.5400	329.4123	346.6049
	136.6654	171.4817	226.1393	273.9904	300.0000
	100.0000	146.4934	194.3980	235.9593	265.2360

Unit: m/day

Fig.2 Zonation of true permeabilities
真の透水係数分布設定

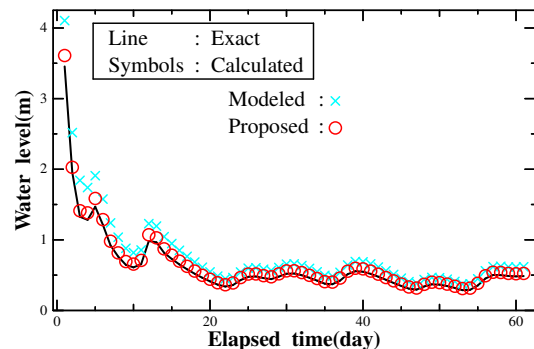


Fig.3 Comparison of water level variations
水位解の比較