

亀裂を有する梁の固有値問題
Eigenvalue problems of a beam having an open-crack

○ 苗村 由美*・青山 咸康*
NAEMURA Yumi, AOYAMA Shigeyasu

1. はじめに

一般に、構造物中の亀裂が固有振動数の変化に影響を及ぼすことはよく知られている。多くの研究者が梁を対象として固有振動数に対する亀裂の影響についての評価を試みてきた。その評価のために FEM が多く適用されてきたが、一般的な FEM においてはメッシュの調整無くして、亀裂を有する梁の振動問題をうまくシミュレートすることはできない。つまり、亀裂の周辺ではより細分化された要素を配置する必要が生じる。近年、要素生成を必要としない Meshless 法が提案されており、その 1 つに T.Belytschko らによる Element-free Galerkin Method(EFG)¹⁾ がある。本報では、この EFG における近似関数を非一様有理 B-スプライン(NURBS) 基底関数を用いて組み立て、亀裂を有する一次元分布質点系モデルの定式化を行ない、二次元弾性体モデルに基づく FEM, 従来の EFG などと解析値を比較する。

2. NURBS 基底関数を用いた亀裂の考慮²⁾

NURBS 関数群を用いた場合節点配置に制約はなく、その特殊微分可能性により、特定次数のなめらかさを表現できる。特定の位置において、重複節点を定義することにより、その点において必要次数の不連続性を有するタワミ曲線を表現できる。

領域 Ω を覆う不均等に配置されたノット(結び)ベクトル X を式(1)で定義する。

$$X = \{\underbrace{x_0, \dots, x_0}_{p+1}, x_{p+1}, \dots, x_{m-p-1}, \underbrace{x_m, \dots, x_m}_{p+1}\} \quad (1)$$

このとき、領域 Ω での従属変数 $u(x)$ の近似 $u^h(x)$ は次式のように定義できる。

$$u^h(x) = \sum_{i=0}^n c_i R_{i,p}(x) \quad (2)$$

ここで、式(1)の p は作成する NURBS 基底関数の次数、 $m+1$ は節点の数、 x_0 と x_m は境界節点の座標である。また、式(2)の c_i は定めるべき定数、 n は $[x_0, x_m]$ 中の NURBS 基底関数の数、 $R_{i,p}$ は i 番目の次数 p の NURBS 基底関数である。関数 $R_{i,p}(x)$ は X より以下のように定義できる。

$$R_{i,p}(x) = \frac{N_{i,p}(x)w_i}{\sum_{j=0}^n N_{j,p}(x)w_j} \quad (3)$$

ここで、 $N_{i,p}(x)$ は漸化式定義による i 番目次数 p の B-スプライン基底関数であり、次式で表せる。

$$N_{i,0}(x) = \begin{cases} 1 & x_i \leq x < x_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4)$$

$$N_{i,p} = \frac{x - x_i}{x_{i+p} - x_i} N_{i,p-1}(x) + \frac{x_{i+p+1} - x}{x_{i+p+1} - x_{i+1}} N_{i+1,p-1}(x) \quad (5)$$

また、式(3)中の w_i は重みである。 w_i がすべての i に対して 1 の場合、次式となる。

$$R_{i,p}(x) = N_{i,p}(x) \quad (6)$$

Fig.1 は $X = \{0, 0, 0, 0, 0, \frac{10}{3}, \frac{10}{3}, \frac{10}{3}, \frac{10}{3}, \frac{20}{3}, 10, 10, 10, 10, 10\}$ と定義するときの、4 次 NURBS 基底関数群 ($p = 4, m = 3$) を図示している。また、Fig.2 は 4 次 NURBS 基底関数の 1 階微分の一部を示している。これらより、4 次 NURBS 基底関数そのものはなめらかであるが、その 1 階微分は $x = \frac{10}{3}$ で不連続性を有していることが確認できる。

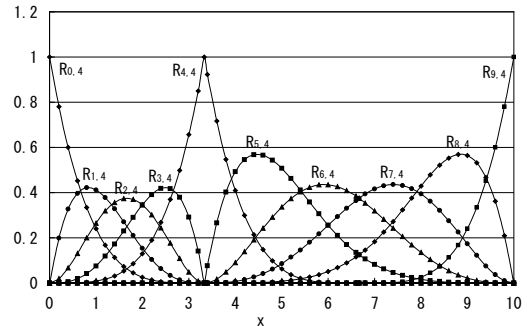


Fig.1 Quartic NURBS basis function ($i=0 \sim 9$)

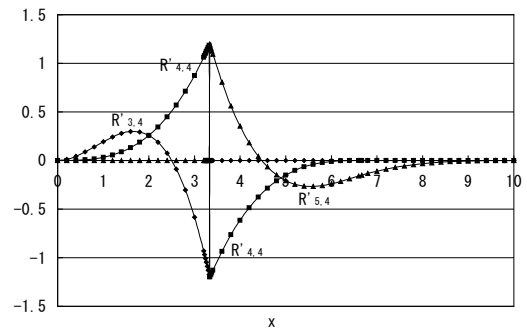


Fig.2 the first derivatives of quartic NURBS basis function ($i=3,4,5$)

*京都大学大学院農学研究科：Graduate School of Agricultural Science, Kyoto University. 数値解析，プログラミング手法

次に、NURBS 基底関数を用いた EFG の定式化を示す。梁が時間の調和振動条件下にあると仮定すると、均質断面の梁の曲げ自由振動方程式は次式で表せる。

$$EIu'''' = \omega^2 \rho Au \quad \text{for } 0 < x < L \quad (7)$$

ここで、 $u = u(x)$ は梁軸座標 x のみの関数、 ρ は物質の密度、 A は梁の断面積、 EI は曲げこわさ、 L は梁長さ、 ω はタワミ振動の固有円振動数である。

式 (7) について境界条件や亀裂部での連続条件を考慮しながら Galerkin 法を適用し、4 次 NURBS 基底関数を用いた近似関数により離散化を行なうと最終的に以下を得る。

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_c - \omega^2 \mathbf{M}_s) \mathbf{c} = \mathbf{f} \quad (8)$$

ここで、 \mathbf{K} は亀裂のない梁の剛性マトリクス、 \mathbf{K}_c は亀裂による \mathbf{K} の修正マトリクス、 \mathbf{M}_s は質量マトリクス、 \mathbf{f} は外部荷重ベクトルを示す。 \mathbf{K} 、 \mathbf{K}_c 、 \mathbf{M}_s 、 \mathbf{f} はそれぞれ以下のように定義できる。

$$K_{ij} = \int_{\Omega} EIR'_{i,4}R'_{j,4}d\Omega + EI[R'_{i,4}R'_{j,4}]_{\Gamma_u} - EI[R'_{i,4}R'_{j,4}]_{\Gamma_{\theta}}$$

$$K_{c,ij} = \frac{EI}{\alpha} [R'_{i,4}(x_c^-) - R'_{i,4}(x_c^+)] [R'_{j,4}(x_c^-) - R'_{j,4}(x_c^+)] \quad (9)$$

$$M_{s,ij} = \int_{\Omega} \rho AR_{i,4}R_{j,4}d\Omega$$

$$f_i = [R_{i,4}V_0]_{\Gamma_V} + [R'_{i,4}M_0]_{\Gamma_M}$$

ここで、 Γ_u 、 Γ_{θ} 、 Γ_M と Γ_V はそれぞれ、たわみ、たわみ角、モーメント、せん断力の境界領域、 M_0 、 V_0 はそれぞれモーメントとせん断力の境界値を示す。また、 x_c は亀裂位置の座標、 α は亀裂を表す回転パネタワミ性である。

また、 \mathbf{K}_c は梁剛性における亀裂による剛性低下を表す。これを \mathbf{K} に加えることによって、亀裂を有する梁の全体剛性マトリクス $\tilde{\mathbf{K}}$ を定義する。よって、亀裂を有する梁の固有振動数 ω は次の固有方程式を解くことによって評価できる。

$$(\tilde{\mathbf{K}} - \omega^2 \mathbf{M}_s) \mathbf{c} = \mathbf{f} \quad \because \tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \mathbf{K}_c \quad (10)$$

3. 解析結果

亀裂の深さを $a \rightarrow 0$ とすることで亀裂のない梁とみなし、理論解・FEM 解・EFG 解と比較した (Fig.3)。ただし、比較した EFG 解では基底関数として MLSM を用いた。解析対象は長さ $L = 800\text{mm}$ 、長方形断面の幅 $b = 10\text{mm}$ と高さ $h = 60\text{mm}$ の単純支持梁とし、各材料定数はヤング率 $E = 2.0 \times 10^{11} \text{N/m}^2$ 、密度 $\rho = 7800 \text{kg/m}^3$ 、ポアソン比 0.3 とした。また、二次元弾性体モデルにおいては平面応力状態の梁を考えた。それぞれの手法から得られた固有円振動数と、理論解を基準とした相対誤差を Fig.3 に示す。NURBS 解が理論解とほぼ同等な値を示し、また FEM 解と EFG 解が近い値を示している。

次に、同様の解析対象を用いて亀裂を有する梁の固有値問題を解いた。亀裂の深さは $a = 10, 15, 20, 25\text{mm}$ 、位置は $x = 100, 200, 300, 400\text{mm}$ とした。NURBS と FEM, R.Y.Liang らによる手法³⁾ から得られた固有振動数の低下量を Fig.4(第一次モード)、Fig.5(第二次モード) に示す。3つの解が同様の低下傾向を示していることが分かる。

4. おわりに

本報では、EFG に NURBS 基底関数を適用した一次元分布質点系モデルの定式化を示し、亀裂を有する梁の固有値問題を解いた。NURBS 基底関数を用いることにより、容易に亀裂を考慮することができた。今後は、複数の亀裂を有する梁や他の構造物の固有値問題への適用を試みたい。

参考文献 1) Belytschko, T., Lu, Y.Y. and Gu, L. : Element-free Galerkin methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.37, pp.229-256, 1994. 2) Fan, S.C. and Sheng, N. : Meshless formulation using NURBS basis functions for eigenfrequency changes of beam having multiple open-cracks, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.269, pp.781-793, 2004. 3) Liang, R.Y., Hu, J. and Choy, F. : Theoretical study of crack-induced eigenfrequency changes on beam structures, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.118, pp.384-396, 1992.

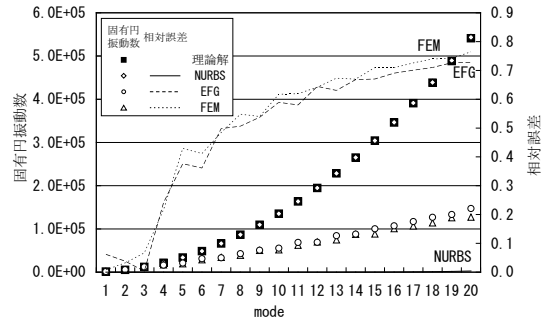


Fig.3 Eigen circle frequency and relative error

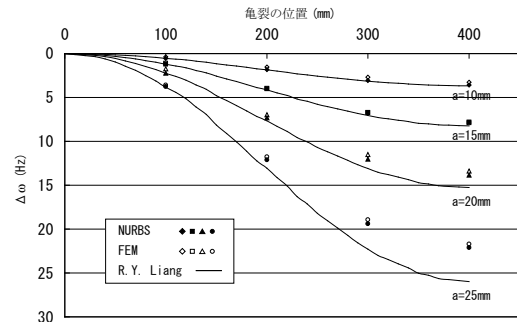


Fig.4 Effect of single crack on the first natural frequency

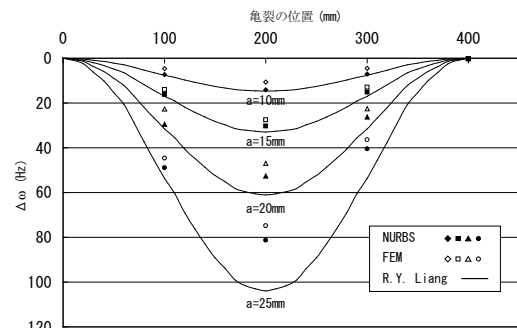


Fig.5 Effect of single crack on the second natural frequency