波の分散効果による伝播速度の変化について

On the Variation of Phase and Group Velocities by the Dispersion of Waves

〇清水　英良*，金　紅藍*，西村　眞一*

Shimizu Hideyoshi, Kin Kouran, Nishimura Shin'ichi

１．はじめに

コンクリートの物性を把握する目的で、非破壊振動実験が多用される。実験方法を大別すると、共振法によりピーク周波数を計測して動ヤング率・剛性率等の動弾性係数を求める手法と、超音波パルス法から媒質中の伝播速度を計測して動弾性係数を求める手法とに大別される。共振法は室内実験であり、縦振動法、たわみ振動法、ねじり振動法が JIS 基準で定められている。また超音波パルス法は、室内・現場実験の両方で用いられ、原理的に縦振動衝撃試験が最も一般的に採用されている。本研究は波の分散を考慮した縦振動（縦波）に着目し、円柱供試体における Pochhammer の理論式を数値計算することにより、従来から採用されている一次元波動解と比較することを目的とした。さらに、パルス法における群速度の影響についても検討した。

２．理論

円柱座標(r,θ, z)で物質内の位置を表し，その変位ベクトルを $\boldsymbol{u}$ とする。この場合の三次元波動方程式は、以下のように表される：

$$\begin{aligned}
\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} &= (\lambda+2\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial r} - \frac{2\mu}{r}\frac{\partial\varpi_z}{\partial\theta} + 2\mu\frac{\partial\varpi_\theta}{\partial z}\\
\rho\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} &= (\lambda+2\mu)\frac{1}{r}\frac{\partial\Delta}{\partial\theta} - 2\mu\frac{\partial\varpi_r}{\partial z} + 2\mu\frac{\partial\varpi_z}{\partial r} \qquad \cdots(1)\\
\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= (\lambda+2\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial z} - \frac{2\mu}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\varpi_\theta) + \frac{2\mu}{r}\frac{\partial\varpi_r}{\partial\theta}
\end{aligned}$$

ここに、ρ：密度，t：時間，λ,μ：ラーメの定数，Δ：体積ひずみ，ϖ：回転（ベクトル）

一次元波動解では半径方向の変位がないとするポアソン比の効果を無視したものとなっているが、円柱供試体の軸方向に伝わる波動は、軸方向のみならず、半径方向にも伝わる三次元問題である。棒の縦軸を z 軸にとると，運動はこの軸に対して対称であり、また境界条件を考慮することにより半径 a の棒の縦振動の方程式は、以下のようになる：

$$\begin{aligned}
&A\left[2\mu\frac{\partial^2 J_0(h'a)}{\partial a^2} - \frac{\rho\lambda\omega^2}{\lambda+2\mu}J_0(h'a)\right] + 2B\mu\gamma\frac{\partial J_1(\kappa' a)}{\partial a} = 0\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots(2)\\
&2A\gamma\frac{\partial J_0(h'a)}{\partial a} + B\left(2\gamma^2 - \frac{\rho\omega^2}{\mu}\right)J_1(\kappa' a) = 0
\end{aligned}$$

但し、ω：角振動数，γ：波数，J：ベッセル関数，A,B：定数，$h'^2 = \dfrac{\rho\omega^2}{\lambda+2\mu}$，$\kappa'^2 = \dfrac{\rho\omega^2}{\mu} - \gamma^2$

上式から A,C を消去した非線形振動方程式を求め、数値計算により一次モードにおける位相速度率を波長比 a/L の関数として求めた（L：波長）。

以上は調和波を用いた共振法における解であるが、超音波パルス法などの衝撃試験では、

*岐阜大学応用生物科学部(*Fac. Bio. Sci., Gifu Univ.*)　キーワード：非破壊振動実験，分散，コンクリート

伝播波は不均質な媒質の影響を受け、単一の波長（あるいは振動数）とはならない。この場合、入力エネルギは群速度で伝播すると考えられ、その値は以下の式で求められる：

$$U = \frac{d\omega}{d\kappa} \qquad U：群速度 \qquad \cdots(3)$$

数値微分の計算には、リチャードソン補外を用いて群速度を求めた。

３．結果及び考察

図は、ポアソン比が 0.2 の場合における位相速度率と群速度率のグラフである。速度率は、両者とも一次元波動論により求まる位相速度で除したものである。図より、両速度率とも波長比が 0（半無限棒）で一次元解と一致し、位相速度率は単調減少であるのに対して、群速度率は途中から上昇し、最終的に位相速度率と同じ値（Rayleigh 波の速度）に収束していくことが伺える。

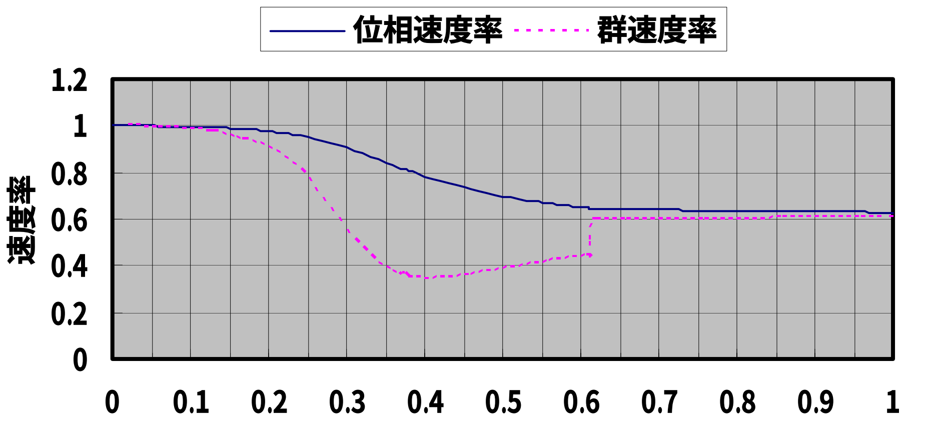

Figure 分散曲線 (ポアソン比0.2)
Dispersion Curves(Poisson's Ratio=0.2)

標準的な供試体（r=5cm, ℓ=20cm）を考えた場合、共振法では波長比が 0.125 となり、図から一次元解と殆ど差異がないことがわかるが、一般的な圧電素子（固有振動数 20kHz）を用いて室内パルス法を実施した場合、コンクリートの位相速度が 4,000m/s であると波長は 20cm であるから波長比は 0.25 となり、この場合の速度率は図より約 0.79 となる。速度値から動ヤング率を推定する場合は、この比の二乗となり、もはや看過し得ない値である。従って、固有振動数が大なる発振・受信子を用いる場合は、計測値を上の分散曲線図で補正する必要があろう。

４．おわりに

波の分散効果を考慮した場合の伝播速度の変化について、円柱供試体モデルの厳密解を数値計算することによって明らかにした。

実際の構造物は様々な形状をなしており、FEM、BEM 等の解析モデルと計測データを併用して分散効果を把握・検証していくことが今後の重要な課題であると思われる。

【参考文献】

コンクリート委員会：コンクリート標準示方書[基準編]，土木学会，1999.
コンクリート委員会：弾性波法によるコンクリートの非破壊検査に関する委員会報告およびシンポジウム論文集，土木学会，2004.
Y.C.ファン：固体の力学／理論，培風館，1971.
岡本舜三：建設技術者のための振動学，オーム社，1981.
A. E. H. Love : A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity(4th ed.), Dover, 1944.
長松　昭男編：ダイナミックスハンドブック，朝倉書店，1993.
森　正武：数値計算プログラミング，岩波書店，1986.