誤差推定に基づいた山地流域の三次元FEMモデリング

3-D FEM modeling of moutainous area based on error estimation

○竹内 潤一郎 · 河地 利彦

○Junichiro Takeuchi and Toshihiko Kawachi

1 はじめに

近年，飽和不飽和浸透流モデルを用いて，地下水涵養や流動，流出過程が数値的に解析されている．一方，数値計算により得られた解の信頼性の観点から，精度保証が求められている．本研究は，アダプティブ法を用いて解の精度を保証した流出解析を行うことを目的とする．

2 支配方程式

流域内の地下領域における水分移動に関して，以下に示す三次元 Richards 式を用いる．

$$(C_w + aS_s)\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(K(\psi)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right), \quad \text{in } \Omega \times T \tag{1}$$

$$C_w = \frac{d\theta}{d\psi}, \quad a = \begin{cases} 0 & \text{if } \psi < 0 \\ 1 & \text{if } \psi \geq 0 \end{cases} \tag{2}$$

ここで，$C_w(\psi)$ は比水分容量，S_s は比貯留量，a は係数，$\psi(\boldsymbol{x}, t)$ は圧力水頭，$u(\boldsymbol{x}, t)$ は水理水頭 ($u = x_3 + \psi$)，$K(\psi)$ は不飽和透水係数，θ は体積含水率，Ω が対象空間領域，T は時間領域である．

土壌水分特性には以下の関係を持つ van Genuchten-Mualem 型のモデルを採用する．

$$S_e = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \begin{cases} [(1 + (\alpha|\psi|)^n)]^{-m} & \text{if } \psi < 0 \\ 1 & \text{if } \psi \geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

$$K = K_s K_r(\psi) = K_s S_e^{\frac{1}{2}} \left(1 - \left(1 - S_e^{\frac{1}{m}}\right)^m\right)^2 \tag{4}$$

ここで，S_e は有効飽和度，θ_s は飽和体積含水率，θ_r は残留体積含水率，α, m, n は土壌水分特性に関するモデルパラメータで，$m = 1 - 1/n$ の関係がある．K_s は飽和透水係数，$K_r(\psi)$ は相対透水係数比である．

3 アダプティブ FEM

ここでは上述の支配方程式を空間領域に関して離散化し，有限要素法 (FEM) を用いて解くものとする．FEM によって得られる解は厳密解の近似であり，その精度はメッシュ依存性があることが知られている．その離散化誤差を定量的に扱うのがアダプティブ法である．これは，有限要素解析解から誤差ノルムの事後推定に基づいて，要素サイズや基底関数の次元を制御することによりメッシュの改善を行う方法論である．

3-1 誤差ノルム　誤差ノルムは以下のように定義される (Zienkiewicz and Zhu, 1987)．ここでは，土壌水分の移動は全水頭の勾配によって生じることから，全水頭の勾配の誤差を評価する H_1 セミノルムを採用する．

$$E = |u - u^h|_{H_1(\Omega)} = \left(\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u^h}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

ここで，E は有限要素解析解における誤差ノルム，u は厳密解，u^h は有限要素解析解である．厳密解は不明であるため，有限要素解析解を用いて推定される．線形基底関数を用いた Galerkin FEM では近似解は C_0 級の連続性を有するため，その一次導関数は要素境界において不連続となる．そこで，以下の Winslow の平滑化法によって各節点における値を求め，基底関数によって補完した近似関数を厳密解の一次導関数とみなす．

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \equiv \bar{u}_{x_i} = \sum_{j=1}^{n_n} N_j u_{x_i}^j \tag{6}$$

ここで，

$$u_{x_i}^j = \frac{\displaystyle\sum_{e \in \eta_j} \frac{\partial u_e^h}{\partial x_i} |\Omega_e|}{\displaystyle\sum_{e \in \eta_j} |\Omega_e|} \tag{7}$$

であり，$\bar{u}_{x_i}$ は推定された厳密解の一次導関数の近似解，n_n は節点数，N_j は節点 j に関する基底関数，$u_{x_i}^j$ は Winslow の平滑化法によって得られた一次導関数の節点値，η_j は節点 j を含む要素の集合，$|\Omega_e|$ は領域 Ω_e の測度である．

要素分割の質を表す指標として誤差ノルム率 λ が用いられる．

$$\lambda = \frac{|u - u^h|_{H_1(\Omega)}}{|u|_{H_1(\Omega)}} \tag{8}$$

ある許容誤差 $\bar{\lambda}$ を達成するため，要素サイズが制御される．現状の要素サイズと制御後の要素サイズの

京都大学大学院農学研究科　Graduate School of Agricultural Science, Kyoto University
キーワード：飽和不飽和浸透流，アダプティブ FEM，誤差推定

関係は，制御によってすべての要素における誤差ノルムが等しくなるという仮定を用いて，以下のように表される (Zienkiewicz and Zhu, 1991).

$$h_e^{\mathrm{new}} = \left(\frac{E_e^{\mathrm{p}}}{E_e}\right)^{\frac{1}{1+n_d/2}} h_e \tag{9}$$

ここで，

$$h_e = \left(\frac{|\Omega_e|}{|\Omega|}\right)^{\frac{1}{n_d}}, \qquad E_e^{\mathrm{p}} = \bar{\lambda}\left(\frac{|u^h|_{H_1}^2}{n_e}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{10}$$

であり，n_d は次元数，h_e は要素の代表長さ，h_e^{new} はメッシュ制御後の要素の代表長さ，E_e は要素 e における誤差，E_e^{p} は要素 e における許容誤差，n_e は要素数である．

3-2 アダプティブ・リメッシング　離散化誤差を改善するメッシュ制御法には，r 法，h 法，p 法といわれる 3 つの方法がある．ここでは，河川網や観測点，土地利用境界を表す節点を任意に追加することのできる h 法の要素再生成法を採用する．

厳密解の一次導関数を推定したのと同様に，要素ごとに求められた要素寸法 h_e^{new} から，Winslow の平滑化法により節点における要素寸法を求め，各節点に関する基底関数を用いて領域全体の要素寸法関数を得ることができる．この逆数は節点分布密度と呼ばれ，これに基づいて節点が発生される．新たに発生された節点を用いて，ドロネイ網変換法 (Schroeder, *et al.*, 1988) によりメッシュが生成される．

4 適用例

アダプティブ法を滋賀県高島市境川の小流域 (図 1) に適用する．対象領域を三角柱要素を用いて要素分割する．一般に飽和不飽和浸透流モデルを用いて土壌水分の動態を解析する場合，降雨時の鉛直方向の浸透流に対応するため，水平方向に比べ鉛直方向の要素長が小さい要素が使用される．そこで，擬似二次元とみなし，三角形要素を用いて領域の要素分割を行ったうえで鉛直方向に層厚を与えることとする．また，流体解析における要素分割では，時間変化する流速や圧力に対応するために時間ステップごとに要素の再分割が行われるが，今回のような流出解析の場合，流況は地形や土壌に大きく依存するため，同一のメッシュを用いる．ここでは，降雨直後で流域内の土壌水分が一様に分布していると仮定して全水頭を与える．すなわち，全水頭の勾配は地形の勾配と一致する．

初期メッシュとして，等間隔に分割された構造型メッシュを用いる (図 2)．初期メッシュにおける誤差ノルムは図 2 に示されるように地形勾配が大きいところで大きくなっているのが分かる．許容誤差を 20% として再分割したメッシュと誤差ノルムを図 3 に示す．

5 まとめ

山地流域における飽和不飽和浸透流モデルによる解析の精度を保証するために，アダプティブ法を用いた．三次元領域のモデル化を行うが，要素形状の特徴から擬似二次元であるとみなし，三角形要素を用いて要素分割を行った．初期メッシュでは地形勾配が急な地点で誤差が大きかったが，アダプティブ法により得られた要素分割では，勾配が大きい地点では細かく分割され，それにより誤差は均等化されることが示された．

今回は土壌水分が一様であるとの仮定を用いて要素分割を行ったが，今後は，時間的に変化する全水頭に対応した要素分割について検討する必要がある．

参考文献　[1] Huyakorn, P. S. and Pinder,G.F. (1983) : *Computational methods in subsurface flow*, Academic Press, 473.　[2] Jeo, B. and Simpson, R. B. (1986) : *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **23**, 751-778.　[3] Neuman, S. P. (1973) : *J. Hydrol.*, ASCE, 99(12), pp.2175-2250.　[4] Winslow, A. M. (1967) : *J. Comp. Phys.*, **2**, 149-172.　[5] Yagawa, M., Yoshimura, S., Nakao, K., and Soneda, N. (1990) : *Trans. Jap. Soc. Mechanical Eng. A*, **56**, 2593-2600 (in Japanese).　[6] Zienkiewicz, O. C. and Zhu, J. Z. (1987) : *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **24**, 337-357.　[7] Zienkiewicz, O. C. and Zhu, J. Z. (1991) : *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **32**, 783-810.　[8] 手塚 明，土田 英二 (2003) : アダプティブ有限要素法, 日本計算工学会, 丸善, 222.

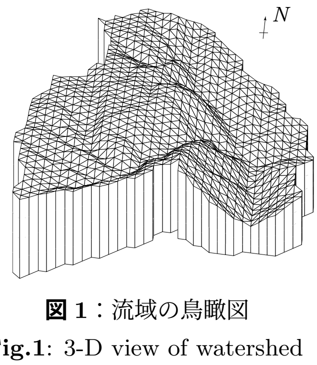

図 1：流域の鳥瞰図
Fig.1: 3-D view of watershed

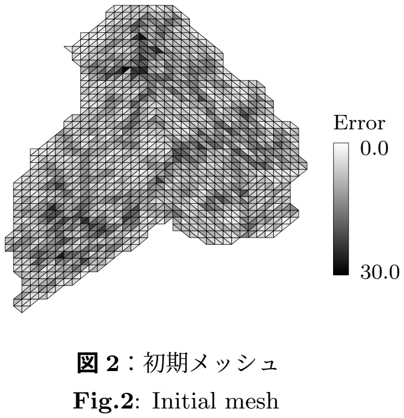

図 2：初期メッシュ
Fig.2: Initial mesh

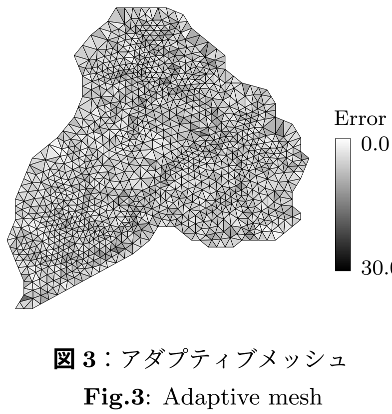

図 3：アダプティブメッシュ
Fig.3: Adaptive mesh