

湖沼水質管理のための河川流入負荷配分の確率論的最適化
Stochastic Optimization for Allocating Pollutant Loads to Influent Rivers for
Lake Water Quality Management

○ 前田 滋哉 ・ 河地 利彦

○ Shigeya Maeda and Toshihiko Kawachi

1. はじめに 湖沼、海域といった閉鎖性水域の水質環境保全には、水域への流入負荷量をコントロールすることが重要である。そこで、あるレベルの水質を維持した上で湖や海への最適な排出負荷量を計算する研究^{1),2)}が数理計画法を用いて行われつつある。著者ら³⁾は、湖沼において水質環境基準の達成を保証した上で、流入河川によるCOD負荷の許容最大値を推定するため、湖沼での流れ解析を前提とした線形計画モデルを考案している。本研究では、前報³⁾で提示したモデルを拡張し、湖内におけるCODの減衰や内部生産量の不確実変動を考慮した確率論的最適化モデルを開発する。そしてそのモデルを長野県の諏訪湖に適用し、最適解を導く。

2. 支配方程式 湖沼の流れは定常浅水長波方程式に支配されると仮定する。また、湖沼におけるCOD輸送は次の式に支配されると仮定する。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) - U \frac{\partial C}{\partial x} - V \frac{\partial C}{\partial y} - KC + S = 0 \quad (1)$$

ここで、 x, y = デカルト座標、 C = 湖水のCOD濃度を鉛直方向に積分した変数 (g/m^2)、 D_x, D_y = x, y 方向分散係数 (m^2/s)、 U, V = x, y 方向の湖水の断面平均流速 (m/s)、 K = 減衰係数 ($1/\text{s}$)、そして S = 内部生産 ($\text{g}/\text{s}/\text{m}^2$) である。

3. 2段階意思決定 湖沼への河川流入COD負荷量をコントロールする過程を、2段階意思決定過程の形に単純化する。第1段階は現在、第2段階は未来（例えば翌年）における意思決定を意味する。第1段階では、翌年の湖沼内およびその周辺の物理化学的環境が不明だが、それらに関する複数のシナリオとその生起確率は仮定できるとする。そしてこの状況下で、翌年の各河川への最適COD負荷配分量を、シナリオごとに決定する。第2段階では、翌年に実際のシナリオが実現したかを把握し、第1段階で定まった配分負荷量に基づき流入負荷量をコ

ントロールする。本研究では、第1段階におけるCOD負荷配分の決定をより合理的なものにするため、確率論的最適化モデルを開発する。

4. 確率論的最適化モデルの定式化 まず、流れの式を有限要素法により離散化、ニュートン・ラフソン法で求解⁴⁾する。次に、COD輸送式(1)中のパラメータ K, S の不確実な時間変動を考慮するため、 (K, S) の値の組をシナリオの形に整理する。得られた流速を用いてシナリオごとにCOD輸送式(1)を有限要素法で離散化する。このとき、最適化問題は次のように表せる。

$$\text{Maximize } f_1 = \sum_{s=1}^{N_s} p_s \left(\sum_{r=1}^{N_r} B_r q_r^L c_{rs}^L \right) \quad (2)$$

subject to

(i) 有限要素法により離散化したCOD輸送式

$$E_s \mathbf{C}_s + G_s \mathbf{c}_s^L = \mathbf{b}_s \quad \forall s \quad (3)$$

(ii) 湖沼におけるCOD濃度に関する水質環境基準

$$H^o \mathbf{C}_s^o - \mathbf{u}_s^o \leq \mathbf{C}^{ou} \quad \forall s \quad (4)$$

(iii) 流入河川水のCOD濃度の上・下限値

$$\underline{\mathbf{c}}_s^L \leq \mathbf{c}_s^{Ll} \leq \mathbf{c}_s^L \leq \mathbf{c}_s^{Lu} \quad \forall s \quad (5)$$

(iv) ϵ 制約条件

$$f_2 \leq \epsilon_2, \quad f_3 \leq \epsilon_3 \quad (6)$$

(v) 変数の非負条件

$$\mathbf{C}_s, \mathbf{C}_s^o, \mathbf{c}_s^L, \mathbf{c}_s^{Ll}, \mathbf{c}_s^{Lu}, \mathbf{u}_s^o \geq 0 \quad \forall s \quad (7)$$

ここで、

$$f_2 = \sum_{s=1}^{N_s} p_s (c_s^{Lu} - c_s^{Ll}), \quad f_3 = \sum_{s=1}^{N_s} p_s \left(\frac{1}{N_o} \sum_{o=1}^{N_o} u_s^o \right) \quad (8)$$

であり、下付添字 r, s はそれぞれ流入河川とシナリオに関する値を表し、上付添字 o は水質環境基準を課す節点（環境基準点）での値を表す。

また, $f_1, f_2, f_3 =$ 目的関数, $p_s =$ シナリオ s の生起確率, $N_s =$ シナリオ数, $N_r =$ 湖沼の流入河川数, $N_o =$ 環境基準点の個数, $B_r =$ 流入河川 r の河口での川幅 (m), $q_r^L =$ 流入河川 r の単位幅流量 (m^2/s) (既知とする), $\mathbf{C}_s = C_s$ を成分に持つベクトル, $\mathbf{c}_s^L =$ 流入河川水の COD 濃度 $c_{r,s}^L$ (mg/L) (決定変数) を成分に持つベクトル, $E_s, G_s =$ 係数行列, $\mathbf{b}_s =$ 定数ベクトル, $H^o =$ 環境基準点での水深の逆数を対角成分に持つ行列, $\mathbf{C}_s^o =$ 環境基準点での C_s を成分に持つベクトル, $\mathbf{u}_s^o =$ 環境基準点における水質環境基準値の超過濃度 u_s^o (mg/L) を成分に持つベクトル, $\mathbf{C}^{ou} =$ 湖沼水の COD 濃度に関する水質環境基準値 C^{ou} (mg/L) を成分に持つベクトル, $\mathbf{c}_s^L =$ 流入河川水の COD 濃度の下限値の指定値を成分に持つベクトル, $\mathbf{c}_s^{Lu}, \mathbf{c}_s^{Ll} =$ 流入河川水の COD 濃度の上・下限値 c_s^{Lu}, c_s^{Ll} を成分に持つベクトル (mg/L), そして $\epsilon_2, \epsilon_3 =$ 目的関数 f_2, f_3 の上限を規定するパラメータである。

目的関数 f_1 は全流入河川からの総許容負荷量の期待値の最大化, f_2 は流入河川間の最大 COD 濃度差の最小化 (排水濃度に関する公平性の最大化), f_3 は環境基準点での水質環境基準の逸脱量の最小化 (水質環境基準の遵守) を意図して設定している。水質環境基準の逸脱量 \mathbf{u}_s^o を新たに導入する理由は, 最適化問題の実行可能解が特定のシナリオがあるために得られないということを避けるためである。

5. 適用例 長野県諏訪湖に確率論的最適化モデルを適用した。解析領域 (13.3km^2) を 2,389 個の三角形要素に分割 (図 1) し, 流れ解析を行った。次に, 湖内 3 点での実測 COD 濃度と内生成有機物 (純生産) のデータ⁵⁾ に基づき, $K = 10^{-7}, 10^{-8} (1/\text{s}), S = 2 \times 10^{-5}, 10^{-5} (\text{g}/\text{s}/\text{m}^2)$ を解析領域内一定として想定し, 計 4 つの (K, S) の組 (シナリオ) を仮定した。この 4 つのシナリオの生起確率はすべて 0.25 とした。湖中央部 1 箇所に環境基準点 (図 1) を設け, そこでの水質環境基準を $C^{ou} = 3\text{mg}/\text{L}$ 以下とした。 $\epsilon_2 = f_2 = 5\text{mg}/\text{L}, \epsilon_3 = f_3 = 0.5\text{mg}/\text{L}$ のとき, $f_1 = 94.9\text{g}/\text{s}$ となり, 各流入河川での最適 COD 濃度・負荷量の期待値はそれぞれ図 2 のように算出された。

6. おわりに 湖沼流入負荷量の管理を 2 段階意思決定過程と捉え, その第 1 段階における意思決定支援のため, 確率論的最適化モデルを開

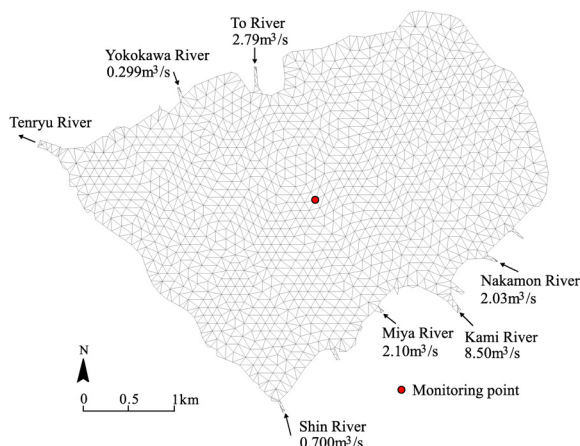


図 1 諏訪湖の要素分割, 流入・流出河川, 環境基準点 (Monitoring point) の位置
Finite element discretization of Lake Suwa, in-flows and outflows, and monitoring points

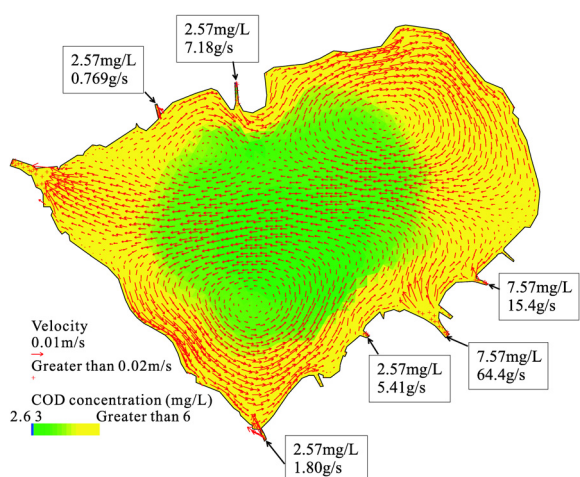


図 2 湖流ベクトル, 湖内 COD 濃度および最適 COD 濃度・負荷量の期待値
Water velocity vectors and COD concentrations in Lake, and optimal allocation of COD concentrations and loads to influent rivers

発した。今後の課題としては, 流れ場の不確実性の考慮, シナリオ数増加に伴う最適化問題の大規模化への対応等が挙げられる。

引用文献 1) Chapra, S.C., Wicke, H.D. and Heidtke, T.M. (1983): Effectiveness of treatment to meet phosphorus objectives in the Great Lakes, *Journal WPCF*, 55(1), pp.81-91. 2) Martínez, A., Rodríguez, C. and Vázquez-Méndez, M.E. (2000): A control problem arising in the process of waste water purification, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 114, pp.67-79. 3) 前田滋哉・河地利彦 (2007): 湖沼水質保全のための多目的流入負荷管理モデル, 農業農村工学会京都支部第 64 回研究発表会講演要旨集, pp.192-193. 4) Kawachi, T. and Koontanakulvong, S. (1983): Numerical investigation of two-dimensional backwater by the finite element method, *Irrigation Engineering and Rural Planning*, 3, pp.32-51. 5) 宗宮功編著 (1990): 自然の浄化機構, 技報堂出版, p.123.