

降雨量と浮遊砂濃度の時系列データに対する確率過程モデル
A Stochastic Process Model for Time Series Data of Rainfall and Suspended Sediment Concentration

○宇波耕一*・河地利彦*
Koichi Unami and Toshihiko Kawachi

1. はじめに

河川における浮遊砂は、河川水質の指標としてのみならず、流域における土壌浸食の程度を示すものとしても重要である。浮遊砂が生産される過程は非常に複雑であるが、流域の地形および降水が、その主要な影響因子となっている。Fournier(1960)は、平均年間浮遊砂生産量 $Q_s(t/km^2)$ を、平均年降水量 $P(mm)$ 、最多月における降水量 $p(mm)$ 、流域面積 $A(km^2)$ 、および流域平均高度と最低地点標高の差 $H(m)$ から推定する式として

$$\log Q_s = 2.65 \log \frac{P^2}{P} + 0.46 \log \frac{H^2}{A} - 3.59 \quad (1)$$

を提案している。この推定式は、世界各気候区の96河川流域における観測データから得られた回帰式である。ただし、これら96河川の内、熱帯気候下にあるものはエーヤワディー川のみである。(1)の右辺のうち、第1項は降水量の変動の大きさを、第2項は流域地形の勾配の大きさを、それぞれ表すものと考えられる。したがって、一つの対象流域を固定して考えた場合、第2項は地形データによって決まる定数であるので、降水量と浮遊砂の入出力関係についてはより動的な表現で記述されるべきであることが示唆される。ここでは、降水量と浮遊砂濃度(SSC)の時系列データを関連付けるブラックボックス型モデルとして、幾何型の確率過程モデルをそのパラメータ推定手法とともに提示する。モデルは、熱帯サバンナ気候下にある5,339km²のN流域において1日毎に実測された時系列データに適用する。また、(1)による浮遊砂生産量の推定ならびに流量データを含めた考察を行う。

2. 確率過程のモデルとパラメータの推定

第 t 日の降雨量 R を $R_t(mm)$ とする。減衰係数 λ を用い、減衰効果を含んだ累積降雨量 S_t を、

$$S_{t+1} = R_t + \lambda S_t \quad (2)$$

で定義する。第 t 日に観測されたSSCを $C_t(mg/L)$ とし、その対数を X_t で表す。降雨量とSSCの時系列を関連付けるモデルとして

$$X_{t+1} = f_0 + f_1 X_t + f_2 R_t + f_3 \log S_t + \varepsilon_t \quad (3)$$

を考える。ここに、 f_i は定数パラメータ($i=0, 1, 2, 3$)、 ε_t は残差項である。実際には、 f_2 を0となるように減衰係数 λ を選び、 R_t 項が現れないようにする。これにより、(3)は、

$$X_{t+1} = X_t + \kappa(\beta + \gamma \log S_t - X_t)\Delta t + \varepsilon_t \quad (4)$$

の形に書き換えられる。ここに、 Δt は時系列データの時間間隔(1day)、 κ 、 β 、および γ は定数で、(3)の右辺と(4)の右辺を等置することで f_i と Δt から求まる。残差項 ε_t が正規分布に従うとき、(3)は確率微分方程式

$$dX = \kappa(\beta + \gamma \log S - X)dt + \sigma dB \quad (5)$$

の離散版としてみなすことができる。ここに、 σ は ε_t の標準偏差、 B はブラウン運動である。 $C = \exp(X)$ であるので、伊藤の公式より、 C に関する幾何型の確率微分方程式

$$dC = \kappa(\alpha + \gamma \log S - \log C)Cdt + \sigma CdB \quad (6)$$

が得られる。ここに、

$$\alpha = \beta + \frac{\sigma^2}{2\kappa} \quad (7)$$

である。また、(1)の連続版

$$dS = \left(\frac{\lambda - 1}{\Delta t} S + \frac{1}{\Delta t} R \right) dt \quad (8)$$

を(6)と連立させれば、 R を入力、 C を出力とした一つのシステムが得られることになる。とくに、 R が一定である場合には、(6)は幾何型平均回帰過程となり、無限時間経過後の C の期待値は $\exp\left(\alpha + \gamma \log \frac{R}{1-\lambda}\right)$ へ収束することが知られている(Øksendal, 2002)。

3. 実測データへの適用

2007年4月1日から6月30日までの91日間の毎日、流出河川の表層水を定容積のボトルで採水し、炉乾燥重量を計ることによりSSCを求めた。また、降雨量については、流域内では十分な精度の雨量観測が行われていないため、流域外に設置された0.2mm転倒マス式自動雨量計のデータを日毎に整理して用いた。このようにして得られた日データ時系列を、SSCについては白丸で、降雨量については黒棒で、それぞれ図1に示す。2006年11月6日から2007年3月20日までの

*京都大学農学研究科, Graduate School of Agricultural Science, Kyoto University
キーワード: 浮遊砂濃度, 確率過程モデル, パラメータ推定

135日間は無降雨であったため、初期条件としては3月21日における S_0 を0とする。以上の時系列データに対し、 $f_2=0$ となるように最小自乗法を用いて定数パラメータ係数 f_i を推定し、各定数を決定すれば、表1のような結果が得られる。なお、残差項 ε_t については、 χ^2 検定によれば正規分布に従っていることを棄却できない。減衰係数 λ の推定された値に対する S を黒折線で、残

差項を除いて生成したノミナルなSSCを灰色折れ線で、それぞれ図1に示す。また、黒丸は、量水標の読みから推定した流量を表す。

表1: 推定されたモデルパラメータ

Table 1: Estimated model parameters

λ	κ	α	γ	σ
0.9829	0.7117	2.846	0.7404	0.6098

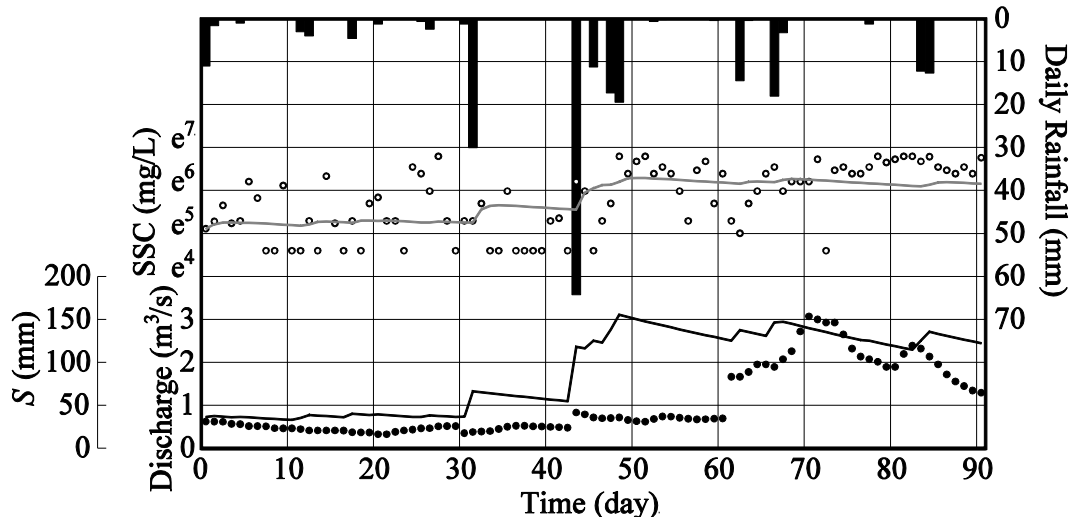


図1: 降雨量、流量、およびSSCの時系列データ

Figure 1: Time series data of rainfall, discharge, and SSC

4. 考察

N流域の平均高度は250m、最低地点標高は123mである。また、1974年から2006までの33年間の観測により、降雨量に関して $P = 1,045.2\text{mm}$ および $p = 258.7\text{mm}$ の値が得られている。降雨の最多月は9月である。(1)によれば、 $Q_s = 2,810\text{t/km}^2$ であり、浮遊砂生産の非常に大きな流域ということになる。ところが、実測された流量とSSCの積で与えられる浮遊砂流量を年間当たりに換算すると平均 3.3t/km^2 、最大でも 14.9t/km^2 である。そこで、(1)における p の値として33年間の平均の代わりに対象期間中の2007年6月に観測された62.0mmを用いると、 $Q_s = 1.4\text{t/km}^2$ が得られ、オーダー的に妥当なものとなる。したがって、降雨量の激増する9月においては、浮遊砂流量も100倍のオーダーで増える可能性がある。

確率過程モデルを適用した期間は、乾季が終了して降雨が漸増する時期にあたり、降雨に対応してSSCもおおむね増加傾向にある。残差項が正規分布に適合しているので、このモデルは降雨からSSCが生成される過程を記述するものとして適切であると判断される。一方、同様な手法を、流量データ、あるいは、浮遊砂流量データに適用しても、残差項が正規分布に従うよ

うなモデルは得られない。実際、第44日(5月14日)に発生した64.2mmの大降雨後、SSCは顕著に増加し始めているのに対して流量は第61日(5月31日)以降と比べてわずかな増加にとどまっている。これは、長い乾季により乾燥した土壌が、地表流出を発生させるだけの飽和度に達するのに、相当な降雨を必要としているためと推測される。SSCの生成過程は、物理現象としては流量の生成過程に比べてより複雑であると考えられるが、ブラックボックス型の確率過程モデルを用いれば、むしろより単純なものとなっている。

5. おわりに

N流域の降雨漸増期における降雨量とSSCの入出力関係が幾何型の確率過程モデルによって記述されることを示した。このモデルの年間を通じての適用可能性については、より長期の実測データに基づいて検討すべきである。また、浮遊砂生産量の推定に際しては、流量変動の動的特性を記述する適切なモデルの開発が必要である。

引用文献

- [1] Fournier, F., 1960. *Climat et Erosion*, Presses Universitaires de France, 175-182.
- [2] Øksendal, B., 2002. *Stochastic Differential Equations*, Springer, Sixth Edition, 80.