

# 非等温地下水浸透流における不飽和透水係数の同定手法

## Identification of Unsaturated Hydraulic Conductivity in Non-isothermal Groundwater

○泉 智揮\*・竹内 潤一郎\*・河地 利彦\*

○Tomoki Izumi, Junichiro Takeuchi and Toshihiko Kawachi

### 1. はじめに

数値解析において適切なモデルパラメータの同定は欠かせない。著者らは、等温条件下の鉛直 1 次元地下水浸透流解析モデルにおいて、圧力水頭の観測値を用いた土壌水理特性の同定手法を提案してきた [1]。しかしながら、観測データによる検証から、特に地表面付近において圧力水頭や土壌水分の観測は地温による影響を受けやすいことがわかってきた。したがって、地表面付近での地下水浸透流解析を扱う場合には、地温の影響を考慮したパラメータ同定手法の開発が必要である。本報告では、非等温条件下での地下水浸透流における不飽和透水係数の同定手法を提案する。

### 2. 支配方程式

非等温鉛直 1 次元地下水浸透流の水分移動と熱伝導における支配式は以下ようになる [2]。

$$\rho_w(C_w + S_w S_s) \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial Q_w}{\partial x} \quad (1)$$

$$C_w = \phi \frac{dS_w}{d\psi}, \quad S_s = \rho_w g (\beta_s + \phi \beta_w) \quad (2)$$

$$Q_w = -\rho_w K \frac{\partial \psi}{\partial x} - a \rho_w D_T \frac{\partial T_s}{\partial x} - \rho_w K \quad (3)$$

ここで、 $\rho_w$  は水の密度、 $C_w$  は比水分容量、 $S_w$  は飽和度、 $S_s$  は比貯留量、 $\psi$  は毛管水頭 ( $\psi < 0$ ) あるいは圧力水頭 ( $\psi \geq 0$ )、 $t$  は時間、 $x$  は深さ (上向きを正)、 $g$  は重力加速度、 $\beta_s$  は鉛直方向の土の圧縮係数、 $\beta_w$  は水の圧縮係数、 $K$  は不飽和透水係数、 $a$  は有効飽和度  $S_e$  によって変化する係数 ( $a=0$  ( $S_e=1$ )),  $a=1$  ( $S_e < 1$ )),  $D_T$  ( $= K \frac{\partial \psi}{\partial T_s}$ ) は熱拡散係数、 $T_s$  は地温である。また、熱伝導に関する支配式は以下になる。

$$C_h \frac{\partial T_s}{\partial t} = -\frac{\partial Q_h}{\partial x} \quad (4)$$

$$C_h(\theta) = (1 - \theta_s) c_s + \theta c_w \quad (5)$$

$$Q_h = -\lambda \frac{\partial T_s}{\partial x} \quad (6)$$

ここで、 $C_h$  は体積熱容量、 $\theta$  は体積含水率、 $\theta_s$  は飽和体積含水率、 $c_s$  と  $c_w$  はそれぞれ土と水の体積熱容量、 $\lambda$  は熱伝導係数である。

### 3. 逆問題の定式化

本研究において決定すべき未知変数は不飽和透水係数である。ここではその不飽和透水係数を有効飽和度の関数とし自由形式パラメータ化手法 [2] を用いてパラメータ化する。図 1 に示すように、不飽和透水係数関数  $K^{\text{FFP}}$  の領域 [ $S_e(\theta_r), 1 (= S_e(\theta_s))$ ] は、 $I$  個の節点で ( $I-1$ ) 個の部分領域に分割される。したがって各部分領域の境界値の不飽和透水係数  $k_i$  ( $i = 1, \dots, I$ ) が、逆解析を通して最適化される未知変数となる。 $K^{\text{FFP}}$  は、 $i$  番目の部分領域 [ $S_{e,i}, S_{e,i+1}$ ] で定義される区分的多項式関数  $K_i(S_e)$  の結合関数として表される。節点間の補間法として 3 次スプラインを採用すると、結合関数と区分関数は以下ようになる。

$$K^{\text{FFP}}(S_e) = \sum_{i=1}^{I-1} K_i(S_e) \quad (7)$$

$$K_i(S_e) = \begin{cases} a_i^k + b_i^k (S_e - S_{e,i}) + c_i^k (S_e - S_{e,i})^2 \\ + d_i^k (S_e - S_{e,i})^3, & S_e \in [S_{e,i}, S_{e,i+1}] \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (8)$$

ここで、 $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $d_i$  は 3 次スプラインの係数である。また、圧力水頭と体積含水率の関係を表す水分保持特性には、それらの関係を表す van Genuchten モデル (VG モデル) [3] を採用し、地表面から同じ深さに設置したテンシオメータと土壌水分計から収集された圧力水頭と体積含水率の観測データから得られる散布図をもとにその関係を決定する。

上述の未知変数を以下の手順により決定する。まず未知変数の集合  $\mathbf{k}$  を以下のように定義する。

$$\mathbf{k} = \{k_i \mid i = 1, \dots, I\} \quad (9)$$

そして圧力水頭の観測値と計算値との最小二乗誤差の総和として定義される目的関数  $J(\mathbf{k})$  を最小化することにより未知変数を決定する。これは、以下のような最適化問題を解くことと等価である。

$$J(\hat{\mathbf{k}}) = \min J(\mathbf{k}), \quad \hat{\mathbf{k}}, \mathbf{k} \in K_{\text{ad}} \quad (10)$$

$$J(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^L \{\psi_l^{\text{obs}} - \psi_l^{\text{com}}(\mathbf{k})\}^2 \quad (11)$$

\*京都大学大学院農学研究科, Graduate School of Agricultural Science, Kyoto University,

キーワード: 逆解析, 自由形式パラメータ, 水分-熱連成解析

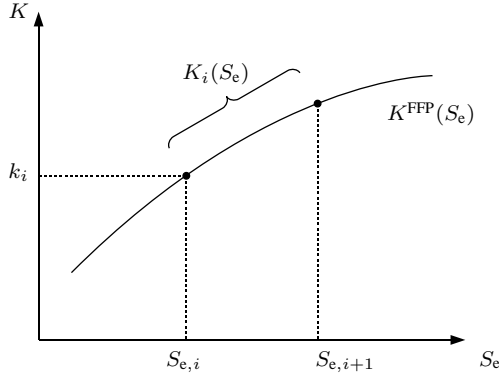


図 1: 自由形式パラメータ化手法  
Fig.1: Free-form parameterization

ここで、 $\mathbf{k}$  はパラメータ  $k_m (m = 1, 2, \dots, M)$  の集合、 $\hat{\mathbf{k}}$  は  $\mathbf{k}$  の最適解、 $K_{ad}$  はパラメータの許容集合、 $L$  は観測データの総数である。最適化手法には、Gauss-Newton 法の修正法である Levenberg-Marquardt 法を用いて、反復計算の中で以下のような探索列を用いてパラメータを修正していく。

$$\mathbf{k}^{\gamma+1} = \mathbf{k}^{\gamma} + \Delta \mathbf{k}^{\gamma} \quad (12)$$

$$\Delta \mathbf{k}^{\gamma} = -(\mathbf{H}^{\gamma} + \eta \mathbf{I})^{-1} \nabla J(\mathbf{k}^{\gamma}) \quad (13)$$

$$\mathbf{H}^{\gamma} = \left[ \sum_{l=1}^L \frac{\partial f_l^{\gamma}}{\partial k_i^{\gamma}} \frac{\partial f_l^{\gamma}}{\partial k_j^{\gamma}} \right] \quad (14)$$

$$f_l^{\gamma} = \psi_l^{\text{obs}} - \psi_l^{\text{com}}(\mathbf{k}) \quad (15)$$

ここで、 $\gamma$  は反復回数、 $\eta$  は係数、 $\mathbf{I}$  は単位行列である。

#### 4. 検証

上述した手法を鉛直 1 次元の仮想土壌に適用して、土壌の不飽和透水係数を推定する。ここでは仮想領域での検証のため、実測による観測データの代わりに検証用モデルによる解析結果（順問題の解）を擬似観測データとして用いる。検証用モデルは式 (1)-(6) の順問題において、不飽和透水係数として VG モデルを採用したものである。図 2 に解析領域となる土壌カラムと観測機器の設置例を示す。図に示すように土壌の深さは 30cm とし、それを各要素 5cm ずつの 7 節点 6 要素に等分割する。観測地点は節点 1, 3, 5 の計 3 地点で圧力水頭、体積含水率、地温を測定する。これらの観測機器のうち上下 2 つは逆解析における Dirichlet 境界条件として用い、中央のものは較正を行うための観測データとして用いる。初期条件は全領域で飽和、等温状態を仮定し、境界条件は観測データが得られたものとして境界の上下端に圧力水頭と地温の Dirichlet 境界を与える。また、解析、検証に用いたおもなパラメータを表 1 に示す。図 3 に推定した  $K^{\text{FFP}}$  と検証用モデルにおいて観測データから VG モデルを用いて得られた  $K^{\text{VG}}$  を示す。推定結果から高い再現性を得られていることがわかる。

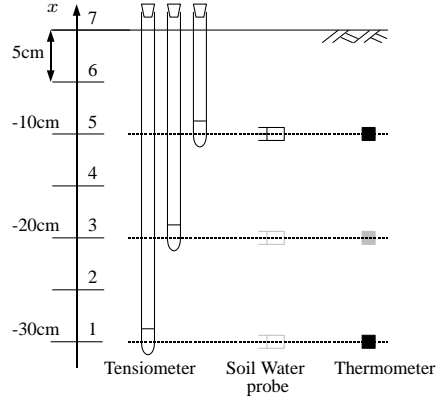


図 2: 土壌カラムと観測機器の設置例  
Fig.2: Typical observation system

表 1: パラメータ  
Table 1: Major parameters

Parameter	Value	Parameter	Value
$\theta_s$	0.760	$\theta_r$	0.218
$\alpha [\text{m}^{-1}]$	1.15	$n$	1.487
$\beta_s [\text{m}^2 \text{N}^{-1}]$	$2.0 \times 10^{-8}$	$\beta_w [\text{m}^2 \text{N}^{-1}]$	$4.4 \times 10^{-10}$
$c_s [\text{Jm}^{-3} \text{K}^{-1}]$	$1.26 \times 10^6$	$c_w [\text{Jm}^{-3} \text{K}^{-1}]$	$4.20 \times 10^6$

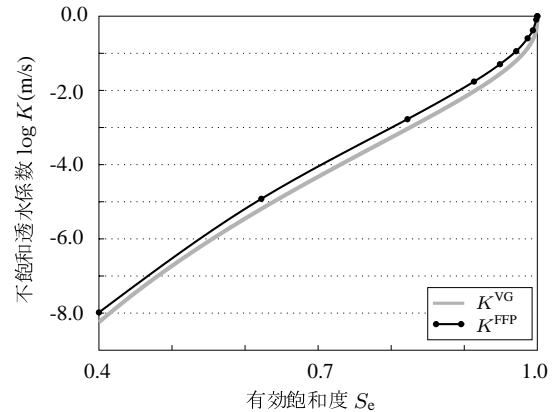


図 3: 推定結果  
Fig.3: Estimation result

#### 5. まとめ

地下水浸透流解析に必要なモデルパラメータである不飽和透水係数の同定手法を提案した。地表面付近の土壌における浸透流は地温の影響を受けることから、非等温条件下の解析モデルを考え不飽和透水係数を推定し本手法の有効性を数値的に検証した。その結果、本手法の有効性が示された。

#### 参考文献

- [1] Izumi, T., J. Takeuchi, T. Kawachi, K. Unami and S. Maeda (2008): An Inverse Method to Estimate Soil Hydraulic Properties in Saturated-unsaturated Groundwater Flow Model, *Journal of Rainwater Catchment Systems*, **13**(2), pp.23-28.
- [2] Kondo, J. and N. Saigusa (1994): Modeling the evaporation from bare soil with a formula for vaporization in the soil pores, *Journal of Meteorological Society of Japan*, **72**, pp.413-421.
- [3] Van Genuchten, M.Th. (1980): A Closed-form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated, *Soil Sci. Soc. Am. J.*, **44**, pp.892-898.