

楕円放物型偏微分方程式の数値解
Numerical Solution of Elliptic-Parabolic Partial Differential Equations

○宇波耕一*・河地利彦*・石田桂*
Koichi Unami, Toshihiko Kawachi, and Kei Ishida

1. はじめに

Sobolev(1964)の表記法により $(\nu - \mu, 0)$ 型となる2階の ν 次元線型偏微分方程式は, $1 < \mu < \nu$ であるとき楕円放物型と称される. 楕円放物型偏微分方程式は, 確率過程をモデルとして用いる諸問題において支配方程式となっている. 経済学においてはTvedt(2003)のような, 水文学においてはUnami et al. (2008)のような例がある. 一方, 数理解物理学の様々な分野で, $\mu = 0$ であるような楕円型の問題, $\mu = 1$ であるような放物型の問題, ならびに, 理想化された飽和-不飽和浸透流のように両者が混在している問題が現れるが, それらを数値的に解く際, 楕円放物型の問題に埋め込むことによって計算技法上の困難を克服できる可能性も期待できる. いずれにおいても, 斉次境界条件のもとでの自明でない解について調べることは, 応用上きわめて興味深い. たとえば, Godoy and Kaufmann (2007) は, 斉次Dirichlet境界条件を課した湧出項を有する放物型偏微分方程式の自明でない弱周期解について論じている. ここでは, 3次元空間における楕円放物型偏微分方程式のDirichlet問題を取りあげ, 有限要素法と陰形式差分法を組み合わせた数値解析手法を提示し, 自明でない解が得られることを示す.

2. 楕円放物型偏微分方程式のDirichlet問題

$\nu = 3$, $\mu = 2$ であるような湧出項のない楕円放物型偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial s} + C \frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} + D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

を考える. ここに, s, t, x は独立変数, $u = u(s, t, x)$ は未知変数, $C = C(t, x)$, $V = V(t, x)$, $D = D(t, x)$ は係数パラメータである. なお, C と V は非負, D は正で, いずれも t と x のみの関数であると仮定する. すなわち, 確率過程と決定論的ダイナミクスが混在したシステムにおける脱出確率の支配方程式を念頭に置いており, s, t に関して負の向きに求解を進めることが適切である. x に関して有界な領域 $\Omega = (x_0, x_n)$ を定義し,

$$u(0, t, x) = 1, \quad (2)$$

$$u(s, t, x) = u(s, t + P, x), \quad (3)$$

および

$$u(s, t, x_0) = u(s, t, x_n) = 0 \quad (4)$$

を課すことによって(1)に対する広義のDirichlet問題を設定する. (2)は s に関する初期条件, (3)は t に関する周期 P の周期境界条件, (4)は x に関する通常のDirichlet境界条件として解釈できる. s に関する定常解で(3)と(4)を満たすものとしては自明な $u = 0$ が存在するが, (2)から出発した非定常解が $u = 0$ に収束するとは限らない. そこで以下では, そのような自明でない解を, 数値的に求めることを試みる.

3. 数値解析手法

有限要素法を x 方向に適用するため, (1)および(4)に替えて弱形式

$$\int_{\Omega} \left(w \frac{\partial u}{\partial s} + wC \frac{\partial u}{\partial t} + wV \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial(wD)}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx = 0 \quad (5)$$

を用いる. ここに, w は $H_0^1(\Omega)$ に属する任意の重みである. 領域 Ω を長さ $\Delta x = (x_n - x_0)/n$ の n 区間に等分割し, 第 k 節点 ($0 < k < n$) に対応する重み w として

$$w = \frac{1}{D} \varphi_k \quad (6)$$

を用いる. ここに, φ_k は風上関数で, その台 $[x_{k-1}, x_{k+1}]$ においては

$$\varphi_k = \begin{cases} \left(\frac{x - x_{k-1}}{\Delta x} \right)^{\exp(Pe^-)} & (x_{k-1} \leq x \leq x_k) \\ \left(\frac{x_{k+1} - x}{\Delta x} \right)^{\exp(Pe^+)} & (x_k < x \leq x_{k+1}) \end{cases} \quad (7)$$

によって定義される. ただし, Pe^\pm は局所Peclet数で, $x^\pm = (x_{k+1} + x_k)/2$ において

$$Pe^\pm = \frac{V(t, x^\pm) \Delta x}{D(t, x^\pm)} \quad (8)$$

として評価される(複号同順). 図1に, いくつかの局所Peclet数に対する風上関数 φ_k を示す.

*京都大学農学研究科, Graduate School of Agricultural Science, Kyoto University
キーワード: 楕円放物型偏微分方程式, 有限要素法, 陰形式差分法

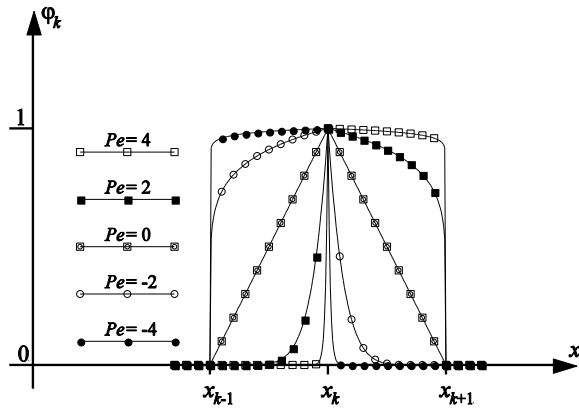


図1: 異なった局所Peclet数に対する風上関数
Figure 1: Upwind functions for different local Peclet numbers

s 方向ならびに t 方向に関しては、完全陰形式差分法を用いて離散化する。すなわち、 s 方向の増分を Δs 、周期 P を m 区間に等分割した t 方向の増分を $\Delta t = P/m$ とし、

$$\frac{\partial u}{\partial s} \approx \frac{u_{i-1,j}(x) - u_{i,j}(x)}{\Delta s} \quad (9)$$

および

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_{i,j+1}(x) - u_{i,j}(x)}{\Delta t} \quad (10)$$

の近似を用いる。ここに、 i と j は整数で、

$$u_{i,j,k} = u(-i\Delta s, j\Delta t, x_k) \quad (11)$$

さらに

$$u_{i,j}(x) = u_{i,j,k} + (u_{i,j,k+1} - u_{i,j,k}) \frac{x - x_k}{\Delta x} \quad (12)$$

の表記を用いている。

以上の結果は、連立一次方程式系

$$M\mathbf{u} = G_s \mathbf{u}^{s+} + G_t \mathbf{u}^{t+} \quad (13)$$

の形にまとめられる。ここに、 \mathbf{u} 、 \mathbf{u}^{s+} 、 \mathbf{u}^{t+} は、それぞれ第 k 成分が $u_{i,j,k}$ 、 $u_{i-1,j,k}$ 、 $u_{i,j+1,k}$ であるような $n-1$ 次元ベクトルであり、 M 、 G_s 、 G_t は $(n-1) \times (n-1)$ 行列である。よって、(2)の離散版 $u_{0,j,k} = 1$ を計算の初期値とし、(3)に相当する $u_{i,m,k} = u_{i,0,k}$ を課しながら(13)を反復解法で解くことにより、 s 、 t 、 x の全領域における数値解が得られる。

4. 数値計算例

領域 Ω は $x_0 = 0$ および $x_n = 4\pi$ によって定め、 $n = 100$ 区間に分割する。周期は $P = \pi$ とする。数値解析手法を2つの例題に適用する。

第1の例題は、移流拡散方程式の斉次境界値問題において自明でない解が存在することを示すためのものであり、係数パラメータは $V = \sin(x)$ 、 $D = 0.00101 + 0.001 \cos(x)$ 、 $D > 0.001$ のとき $C = 0$ 、 $D \leq 0.001$ のとき $C = 1$ に設定する。 t 領域は $m = 10$ 区間に分割する。 $\Delta s = 0.01$ とし

て計算を実行すると自明でない定常解と見なしうる状態に収束する。 t 方向に関しては、終始ほぼ一様である。200ステップ毎の計算結果および定常解(太線)を図2に示す。 Ω の部分領域 $(\pi, 3\pi)$ が、境界から“隔離”されている。

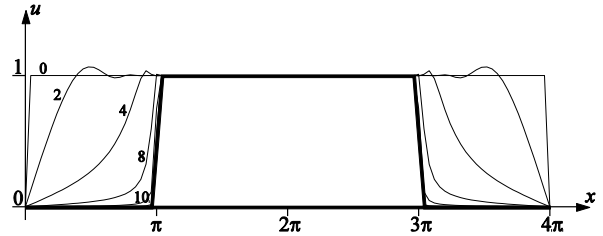


図2: 移流拡散方程式の数値解

Figure 2: Numerical solution for convection-diffusion equation

第2の例題における係数パラメータは、 D に関しては第1の例題と同じ設定とし、その他は $V = \sin(x - \sin(2t))$ 、 $C = 0.01(1 + \sin(2t))$ へ変更する。さらに t 領域の分割は $m = 100$ 区間とする。 s に関しては定常な周期解が、図3のように得られる。この図において、黒点は $u = 0$ 、白点は $u = 1$ を表わす。

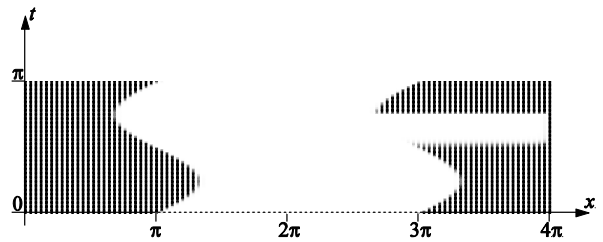


図3: 自明でない周期数値解

Figure 3: Non-trivial periodic numerical solution

5. おわりに

適切なスキームを組み合わせることにより、楕円放物型偏微分方程式の数値解が容易に得られることを示した。例題において、自明でない解の存在が示唆された。今後、この数値手法の水理学、水文学の様々な問題に対する応用が期待される。

引用文献

- [1] Godoy T, Kaufmann U (2007): Periodic parabolic problems with concave and convex nonlinearities. *Nonlinear Differential Equations and Applications* 14:443-453.
- [2] Sobolev SL (1964): *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*. Translated by Dawson ER, Dover, 37.
- [3] Tvedt J (2003): Shipping market models and the specification of freight rate processes. *Maritime Economics & Logistics* 5:327-346.
- [4] Unami K, Kawachi T, Maeda S, Takeuchi J (2008): Computational methods supporting rainwater harvesting technology. Chapter 4 in *New Topics in Water Resources Research and Management*, edited by Andreassen HM, Nova Science, 167-193.