健全度寿命によるマルコフ連鎖モデル

Markov Chain Model　by　The Life Expectancy　of　Soundness

〇渡邊博[*]・上脇田太[*]
Hiroshi WATANABE　　Futoshi KAMIWAKITATA

1.　はじめに

マルコフモデルでは遷移確率の規定が最も重要であるが、一般的な最尤法や最小二乗法は、個々の施設の遷移度数を基礎にするのが本来の方法である。しかし、サンプル数が少ない、時系列データが不十分、母集団が異なる等の制約がある場合には、実測値と計算値の差の総和が最小となるように遷移確率を繰り返し計算から求める方法を取らざるを得ないのが実情である。しかし、この手法では、データの状態によっては、たとえばＳ-3 以下の状態が確認されていなければ、予測モデルは永久にＳ-4 止まりになるなどの不都合が生じる。これらの課題を克服する方法として、1）状態度数の経年変化ではなく、状態の継続時間（寿命）から遷移確率を求める手法と、2）マクロデータから特定地区の劣化推移を類推する手法について検討を試みた。なおデータは便宜上人工データによった。

2.健全度寿命による遷移確率

マルコフモデルによる健全度の平均値は指数関数的に推移する性質を持っている。これは自然界の物質量の減少変化（半減期等）と同質のもので、ｙ＝e^{-ax}の式で一般化される。この点に着目し、劣化曲線が指数関数的に変化して行くものとすると、健全度評価は離散的であるので、連続関数である指数曲線上では、健全度間隔が半分になるまでの時間が、ある水準の健全度が次のレベルの健全度に低下するまでの時間（寿命）となる。

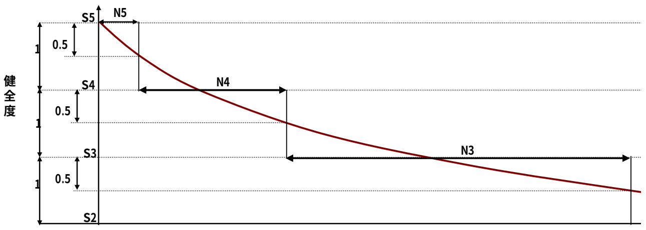

Fig.1　劣化曲線と健全度寿命

Degradation Curved　and　Life Expectancy of Soundness

武田俊明等[1]は、健全度の維持時間を半減期として求めることを提案しており、これを参考に以下の検討を進めた。 観測データから、経過年 0 年時は健全度Ｓ-5 と置き、観測データから指数回帰曲線を求め、これより健全度寿命を推定することができる。劣化過程を表すマルコフ連鎖モデルは（1）式で一般化される。

$$\pi(k+1)=P\pi(k) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (1)$$

ここに、　π(k)：k 時点の事象分布（確率ベクトル）

Ｐ　：遷移確率行列（マトリクス）

$\pi(k+n)=P^{n}\pi(k)$　で、ｎ次のπ(ｋ)が半分になるとすると、

$$P^{n}=1/2\pi(k)/\{\pi(k)\}=0.5 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (2)$$

ゆえに、それぞれの健全度滞留時間確率（1-ｐｉ）及び遷移確率（ｐｉ）は以下のようになる（紙面の都合上、式の展開は省略）。

$$(1-pi)=\exp\left(\frac{\ln(0.5)}{ni}\right) \qquad pi=1-\exp\left(\frac{\ln(0.5)}{ni}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots \qquad (3)$$

以上の手法と、一般的に行われているトライアル法を用い、モデルケースについてマルコフモデルを作成した（Fig.2）。トライアル法は、観測データがＳ-3 までしかない場合、永久にＳ-2 は出現せず、健全度寿命法の方がより現実的な傾向を示すと評価できる。

*　NTC コンサルタンツ株式会社　ＮＴＣ-Consultants　Ｃo,Ｌtｄ　　【キーワード】材料施工、管理

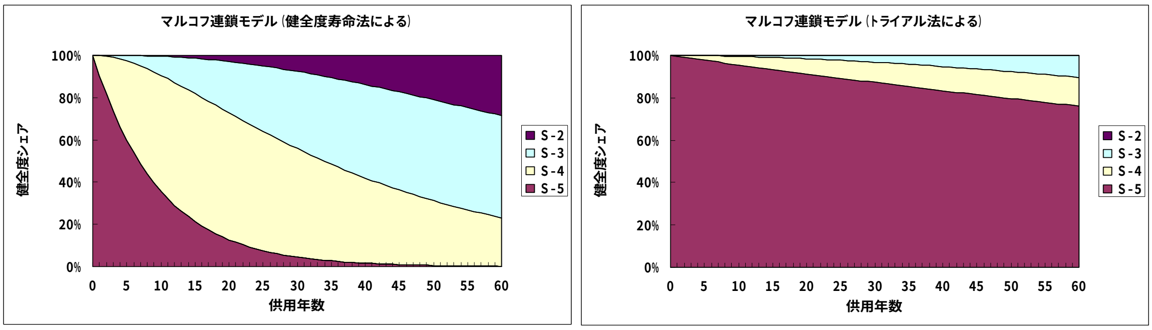

Fig.2　健全度寿命法とトライアル法によるマルコフモデル（開水路）

Markov model　by　Life Expectancy　of　The Soundness Method and The Trial Method (Open Channel)

3.全国平均から当該地区劣化曲線への変換

多くの地区は十分なサンプルがそろっていないため、地区単独データからだけで劣化傾向を把握するのは誤差が大きい。そこで、ベイズ推定手法[2)、3)]を用い、マクロ的な施設の劣化推移から尤度を求め、地区観測値から事前確率を設定し、事前確率×尤度関数を当該地区の劣化予測値（事後確率）とする方法について検討した。

（事前共役分布が正規分布とした場合の標本ｙの尤度）

$$p(y\mid\theta)=\exp\left\{\frac{(\bar{y}-\theta)^2}{2\sigma^2/n}\right\}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right)^n\exp\left\{-\frac{\Sigma(y_i-\bar{y})^2}{2\sigma^2/n}\right\}$$

（事前確率）

$$w(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}\exp\left\{-\frac{(\theta-\mu)^2}{2\tau^2}\right\}$$

（事後確率）

$$w'(\theta)\propto\exp\left\{-\frac{(\theta-\mu)^2}{2\tau^2}\right\}$$

ここで　$\dfrac{1}{\tau'^2}=\dfrac{1}{\tau^2}+\dfrac{n}{\sigma^2}$　　$\mu'=\dfrac{(1/\tau^2)\mu+(n/\sigma^2)y}{1/\tau^2+n/\sigma^2}$

´ ；事後確率パラメータ
τ ；システム方程式誤差分散
σ ；観測方程式誤差分散
μ ；システム平均
$\bar{y}$；観測平均

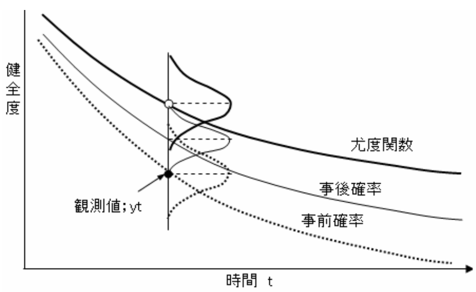

Fig.3 事前確率と事後確率
Prior Probability and Posterior Probability

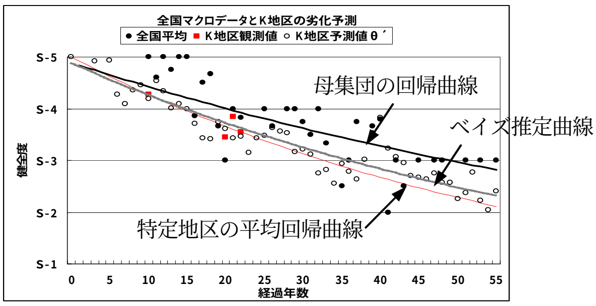

Fig.4 ベイズ推定による劣化曲線
Degradation Curved by Bayesian Inference

4.さいごに

遷移確率設定が難しいことから、マルコフモデルが実際の現場で用いられることは少ないが、本稿で紹介した遷移確率設定手法は比較的容易であり、実用性が高いと考えられる。一方、マクロデータから劣化の尤度を求め、ベイズ推定法により個別地区の劣化確率の補正を試みたが、その有効性と具体的な手法については、具体的事例に基づいた検証が必要であると考えている。

参考文献
1) 「橋梁点検実測データに基づく橋梁資産劣化予測評価の検討」武田俊明等 土木学会構造工学論文集 Vol.51A 2005.3
2) 入門ベイズ統計　松原望（東京図書）
3) ベイズ統計データ分析　古谷知之（朝倉書店）