# Mixed Form Richards 式を用いた浸透流解析における不飽和透水係数の同定手法
# Identification of Unsaturated Hydraulic Conductivity in Mass-conservative Seepage Flow

○泉 智揮 *・藤原 正幸 *・竹内 潤一郎 **・河地 利彦 **
○Tomoki Izumi, Masayuki Fujihara, Junichiro Takeuchi and Toshihiko Kawachi

## 1. はじめに

近年，農地から漏出する窒素やリンによる環境負荷が問題となっており，農地の浸透特性を把握し，環境負荷の定量的な予測や対策手法の評価が重要である．そのような予測・評価に対して，近年の計算機の発達により，数値解析手法を用いることは，コストや労力の面で有利である．その数値解析において，信頼に足る解析結果を得るためには，支配方程式に含まれるモデルパラメータを適切に同定する必要がある．

これまで著者らは，地下水浸透流の支配方程式におけるモデルパラメータである土壌水理特性の同定手法を提案している [1, 2]．不飽和土壌を含む浸透流は Richards 式によって支配されるが，その Richards 式は，(1) 圧力水頭を未知変数とするもの（ψ-based form），(2) 体積含水率を未知変数とするもの（θ-based form），(3) 圧力水頭と体積含水率の 2 つを未知変数とするもの（Mixed form）の 3 つの形式で記述される．これまでの著者らの研究では，支配方程式として (1) や (2) を扱っているが，(1) では飽和領域を含めた解析が可能であるが飽和付近では比水分容量が急激に変化するために計算が不安定になることや水分フラックスを圧力水頭に換算するため水収支が合わないことが指摘されており，また (2) では不飽和領域のみが解析対象となる．一方，(3) では (1) でみられる水収支の不整合が改善されることが示され [3]，飽和領域を含む計算スキームの開発もなされている [4]．

そこで本研究では，Mixed Form Richards 式を支配方程式とする地下水浸透流解析における不飽和透水係数の同定手法の開発を目的とする．

## 2. 順問題の定式化

### 2.1 支配方程式

飽和－不飽和 Mixed Form Richards 式は，以下のように表わされる．

$$\phi\frac{\partial S_{\mathrm{w}}}{\partial t}+S_{\mathrm{w}}S_{\mathrm{s}}\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial z}\left(-K\frac{\partial h}{\partial z}\right)$$

ただし，

$$S_{\mathrm{s}}=\rho_{\mathrm{w}}g\left(\beta_{\mathrm{s}}+\phi\beta_{\mathrm{w}}\right)$$

$$K=K_{\mathrm{s}}K_{\mathrm{r}}$$

ここで，$\phi$ は間隙率，$S_{\mathrm{w}}$ は飽和度，$t$ は時間，$S_{\mathrm{s}}$ は比貯留量，$\psi$ は圧力水頭，$z$ は鉛直座標（上向きを正），$K$ は不飽和透水係数，$h(=\psi+z)$ は全水頭，$\rho_{\mathrm{w}}$ は水の密度，$\beta_{\mathrm{s}}$ は土の圧縮率，$\beta_{\mathrm{w}}$ は水の圧縮率，$K_{\mathrm{s}}$ は飽和透水係数，$K_{\mathrm{r}}$ は相対透水係数である．

この支配方程式に対して空間方向には Galerkin 有限要素法，時間方向には有限差分法を用いて離散化し，初期条件，境界条件を与えて求解する．

### 2.2 土壌特性

土壌水分特性曲線は，van Genuchtetn [5] のモデルを採用する．

$$S_{\mathrm{e}}=\frac{\theta-\theta_{\mathrm{r}}}{\theta_{\mathrm{s}}-\theta_{\mathrm{r}}}=\left[1+|\alpha\psi|^{n}\right]^{-m}$$

ここで，$S_{\mathrm{e}}$ は有効飽和度，$\theta$ は体積含水率，$\theta_{\mathrm{s}}$ は飽和体積含水率（間隙率），$\theta_{\mathrm{r}}$ は残留体積含水率，$\alpha$，$n$，$m$ は形状パラメータであり，$m=1-1/n$ の関係にある．

## 3. 逆問題の定式化

### 3.1 不飽和透水係数

ここでの未知変数となる不飽和透水係数のパラメータ表現には，関数形状の自由度が高い以下のような自由形式パラメータ化手法を用いる [2]．

$$K_{\mathrm{r}}^{\mathrm{FFP}}\left(S_{\mathrm{e}}\right)=\sum\nolimits_{i}K_{\mathrm{r},i}\left(S_{\mathrm{e}}\right)$$

ここで，$K_{\mathrm{r},i}$ は $K_{\mathrm{r}}^{\mathrm{FFP}}$ の第 $I$ 区間における区分的多項式関数で以下のような三次スプライン関数とする．

$$K_{\mathrm{r},i}\left(S_{\mathrm{e}}\right)=\begin{cases}a_i^k+b_i^k\left(S_{\mathrm{e}}-S_{\mathrm{e},i}\right)+c_i^k\left(S_{\mathrm{e}}-S_{\mathrm{e},i}\right)^2 & \\ +d_i^k\left(S_{\mathrm{e}}-S_{\mathrm{e},i}\right)^3 & S_{\mathrm{e}}\in\left[S_{\mathrm{e},i},\ S_{\mathrm{e},i+1}\right]\\ 0 & \mathrm{otherwise}\end{cases}$$

ここで，$a_i^k$，$b_i^k$，$c_i^k$，$d_i^k$ は三次スプラインにおける係数である．

### 3.2 最適化問題

解くべき逆問題は，未知変数の集合を $\boldsymbol{k}$ とすると，以下のような観測値と順問題の解（計算値）との二

* 愛媛大学農学部，Faculty of Agriculture, Ehime University.
** 京都大学大学院農学研究科，Graduate School of Agriculture, Kyoto University.
キーワード：逆解析，Mixed Form Richards 式，自由形式パラメータ

乗誤差の総和（目的関数）を最小化する最適化問題となる．

$$E(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{2}\sum_{l}^{L}\left(\psi_l^{\mathrm{com}}(\boldsymbol{k}) - \psi_l^{\mathrm{obs}}\right)^2$$

最適化アルゴリズムには Levenverg-Marquardt 法を用い，反復計算の中で以下のような探索列を用いてパラメータを修正していく．

$$\boldsymbol{k}^{\gamma+1} = \boldsymbol{k}^{\gamma} + \Delta\boldsymbol{k}^{\gamma}$$
$$\Delta\boldsymbol{k}^{\gamma} = -(\boldsymbol{H}^{\gamma} + \eta\boldsymbol{I})^{-1}\nabla J(\boldsymbol{k}^{\gamma})$$
$$\boldsymbol{H}^{\gamma} = \left[\sum_{l=1}^{L}\frac{\partial f_l^{\gamma}}{\partial k_i^{\gamma}}\frac{\partial f_l^{\gamma}}{\partial k_j^{\gamma}}\right]$$
$$f_l^{\gamma} = \psi_l^{\mathrm{com}}(\boldsymbol{k}) - \psi_l^{\mathrm{obs}}$$

ここで，$\gamma$ は反復回数，$\eta$ は係数，$\boldsymbol{I}$ は単位行列である．

## 4. 検証

上述のモデルを [2] で観測された 2008 年 7 月 1 日から 7 月 8 日の畑地における土壌水分量のデータを用いて検証する．観測システムの概要と計算領域の要素分割を図 1，計算に用いた土壌の物性を表 1 に示す．図 1 に示すように，地下 10cm，20cm，30cm の 3 地点で圧力水頭と体積含水率を観測する．計算領域は 10cm から 30cm の領域とし，観測データのうち上下端のデータを Dirichlet 境界として与え，中央の観測データを (7) 式におけるキャリブレーション用の観測データとして不飽和透水係数の同定を行う．

不飽和透水係数の同定結果を図 2，同定された透水係数による観測データの再現結果を図 3 に示す．結果より，本手法により同定された不飽和透水係数を用いた順問題の解は，観測データのおおよその傾向を再現可能であるが，細部については観測データとの乖離がみられる．

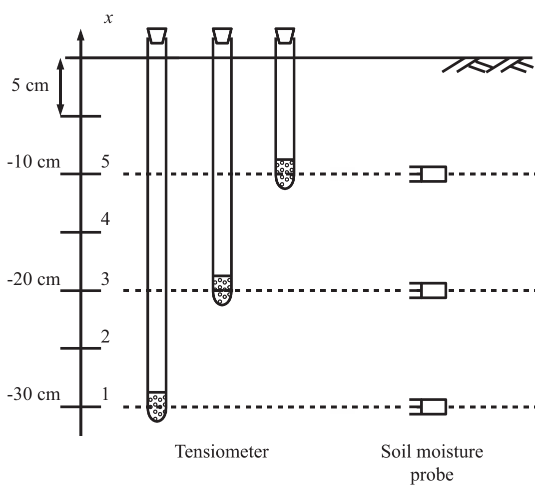


**図** 1: 観測システムの概要
**Fig.1**: Observation system

**表** 1: 土壌パラメータ
**Table 1**: Soil parameters

| | |
|---|---|
| $K_{\mathrm{s}}$ [m/s] | $4.5\times10^{-4}$ |
| $\alpha$ [/m] | 10.3 |
| $n$ [-] | 1.17 |
| $\theta_{\mathrm{s}}$ [m$^3$/m$^3$] | 0.52 |
| $\theta_{\mathrm{r}}$ [m$^3$/m$^3$] | 0.22 |

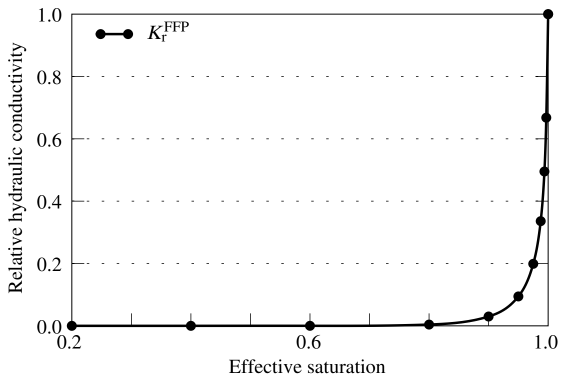


**図** 2: 同定結果
**Fig.2**: Identification result

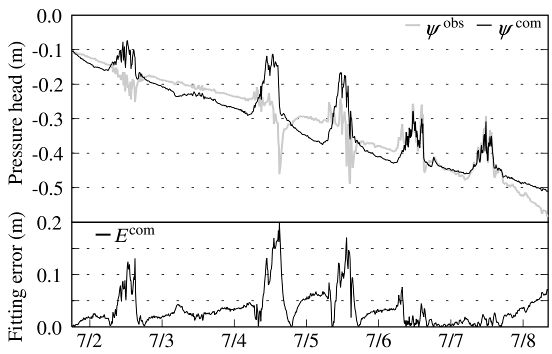


**図** 3: 観測データとの比較
**Fig.3**: Reproduction accuracy of forward solution

## 5. まとめ

Mixed Form Richards 式を支配方程式とする浸透流解析における不飽和透水係数の同定手法を開発しその精度を検証した．その結果，全体としては観測データを再現可能であるが，細部については今後検討が必要である．

## 引用文献

[1] Izumi, T., J. Takeuchi, T. Kawachi, K. Unami and S. Maeda (2008) : An Inverse Method to Estimate Soil Hydraulic Properties in Saturated-unsaturated Groundwater Flow Model, J. Rainwater Catchment Syst., 13(2), pp.23-28.

[2] Izumi, T., J. Takeuchi, T. Kawachi and M. Fujihara (2009) : An Inverse Method to Estimate the Unsaturated Hydraulic Conductivity in Seepage Flow in Non-isothermal Soil, Trans. JSIDRE, 77(6), pp.623-630.

[3] Celia, M.A., E.T. Bouloutas, and R.L. Zarba (1990) : A General Mass-conservative Numerical Solution for the Unsaturated Flow Equation, Water Resour. Res., 26(7), pp.1483-1496.

[4] 竹内潤一郎・河地利彦・泉 智揮 (2008) : Mixed Form Richards 式のための陽的スキームの開発，平成 20 年度農業農村工学会大会講演会講演要旨集，3-12.

[5] van Genuchten,M.Th. (1980) : A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils, *Soil Sci. Soc. Am. J.*, **44**, pp. 892-898.