LSFEM を用いた Richards 式のモデル化
Modeling of Richards equation Using LSFEM

○竹内 潤一郎 · 伊藤 陽 · 河地 利彦
○Junichiro Takeuchi, Akira Ito, and Toshihiko Kawachi

1 はじめに

近年，地表水と地下水の流動を連成させた流域モデルが提案されている [1]–[6]．多くのモデルにおいて，地表水流動には水平 2 次元拡散波方程式，地下水流動には 3 次元 Richards 式が支配方程式として用いられている．湛水時の地表面における地表水と地下水との水交換は，拡散波方程式においてはソース項，Richards 式においては境界条件として扱われる．地表水-地下水間の質量保存のために，拡散波方程式のソース項と Richards 式の浸潤フラックスは同じ値を与える必要がある．有限要素法（FEM）を数値解法として採用した場合，Richards 式の境界条件を与える方法としては，湛水深を Dirichlet 境界とするものと浸潤フラックスを Neumann 境界とする方法があり，いずれの場合も問題が生じる．Neumann 境界の場合は，質量保存は保たれるが，時間や土壌水分量に依存する浸透能式を必要とし，新たなパラメータの同定が必要となるだけでなく，計算される地表面の圧力水頭は湛水深と必ずしも一致しない．また，Dirichlet 境界として与える場合は，地表面の圧力水頭は水深と一致するが，境界における浸潤フラックスを要素内のフラックスで代用しなければならず，水収支の保存性を保つことができない．

そこで，本研究では，1 階偏微分方程式系として定式化を行う LSFEM（Least-Squares FEM）[7] を Richards 式の数値解法として採用したモデルを提案する．LSFEM においては，圧力水頭とフラックスが未知変数として計算されるため，Dirichlet 境界として圧力水頭を与えても，その境界におけるフラックスも自動的に計算される．すなわち，湛水時の地表面における矛盾のないモデル化が可能となることが期待される．ここでは，鉛直 1 次元領域を対象とし，一定水深での湛水状態における浸潤フラックスの時間変化と地表面付近の要素分割を変化させた場合の変化について計算し，その有効性を検証する．

2 LSFEM を用いた定式化

LSFEM では，高階の微分項に対して新たな変数を導入することにより，1 階の偏微分方程式系（移流方程式系）として定式化を行う．一般に，移流問題に対しては上流スキームを導入する必要があり，その数値モデルにおいて得られる連立 1 次方程式は非対称となるため，反復解法による解の計算が困難になる．LSFEM では，定式化の過程で自動的に上流化の効果を付与することができ，かつ，あらゆる微分方程式に対して正定値対称である係数行列を形成する．そのような連立 1 次方程式には，CG（Conjugate Gradient）系の行列解法が有効であり，本研究においても，CGSTAB（CG Stable）法を用いる．

圧力水頭を未知変数とした鉛直 1 次元 Richards 式は以下のように定義される．

$$C\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial h}{\partial x}\right) \tag{1}$$

ここで，

$$C = \frac{d\theta}{d\psi} + S_{\mathrm{s}}$$

であり，C は貯留係数，ψ は圧力水頭，$h\ (= \psi + x)$ は水理水頭，K は不飽和透水係数，θ は体積含水率，S_{s} は比貯留量，$x\ (\in \Omega)$ と t はそれぞれ座標と時間である．ここで，フラックスとして $p\ (= K\partial h/\partial x)$ を定義することによって，以下の 1 階偏微分方程式系とする．

$$\begin{cases} K\dfrac{\partial h}{\partial x} - p = 0 \\ C\dfrac{\partial h}{\partial t} - \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

時間微分に対して，完全陰解法を採用することにより以下のようになる．

$$A_1\frac{d\boldsymbol{u}}{dx} + A_2\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \tag{3}$$

ここで，

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -K^{n+1} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & C^{n+1}/\delta t \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} p^{n+1} \\ h^{n+1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ C^{n+1}h^n/\delta t \end{pmatrix}, \tag{6}$$

であり，n は時間に関するインデックス，δt は時間ステップである．式 (3) の $\boldsymbol{u}$ に対して，近似関数 $\bar{\boldsymbol{u}} = (\bar{p}, \bar{h})^{\mathrm{T}} \in X \times H = \{H_0^1(\Omega)\} \times \{H_0^1(\Omega)\}$ を導

京都大学大学院農学研究科　GraduateSchool of Agricultural Science, Kyoto University
キーワード：数値解析，浸潤量，地表水-地下水連成モデル

入し，その残差の二乗を汎関数 I として以下のように定義する．

$$I = \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(A_1\frac{d\bar{\boldsymbol{u}}}{dx} + A_2\bar{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{f}\right)^2 dx \tag{7}$$

近似解 $\bar{\boldsymbol{u}}$ と同様の関数空間に属する試行関数 $\boldsymbol{v} = (q,k)^{\mathrm{T}} \in X \times H$ を用いて，汎関数 I の停留問題は以下のように表される．

$$\lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}I(\bar{\boldsymbol{u}} + s\boldsymbol{v}) = 0 \tag{8}$$

最終的にこの停留問題は，任意の $\boldsymbol{v}$ に対して，以下の式を満たす $\bar{\boldsymbol{u}}$ を求める問題として帰着される．

$$\int_{\Omega}\left\{\left(A_1\frac{d\bar{\boldsymbol{u}}}{dx} + A_2\bar{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{f}\right)\left(A_1\frac{d\boldsymbol{v}}{dx} + A_2\boldsymbol{v}\right)\right\}dx = 0 \tag{9}$$

ここでは，h，p ともに線型近似を用い，k と q には基底関数を与える．このLSFEMによる定式化においては，水位境界とフラックス境界は，それぞれ h と p に対してDirichlet型の境界条件として与えられる．

3 計算例

計算例として，図1に示すような鉛直1次元領域を対象とし，透水係数が 1.0×10^{-2} cm/s の砂を想定した．土壌水分特性と不飽和透水係数には，van Genuchiten-Mualem型のモデルを採用する．初期状態を $\psi(x,0) = -20$ cm とし，境界条件として $\psi(0,t) = -20$ cm，$\psi(50,t) = 5$ cm を与える．図2に示すように，領域の分割数を変えた4つの計算格子を用意し，LSFEMとGalerkin FEMでそれぞれ計算を行う．湛水開始からおよそ15分後に定常に達し，その時の浸潤量は 1.165×10^{-2} cm/s であった．計算結果（図3）から，Galerkin FEMではすべての要素分割において，LSFEMよりも累積浸潤量が過小に計算されることが分かる．また，LSFEMでは，ケース1以外の要素分割では，湛水開始直後に浸潤量の差があるものの，各ケース間の累積浸潤量の誤差は小さいことが分かる．

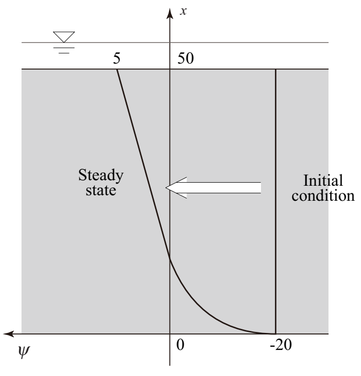


図1：対象領域
Fig.1: Objective area

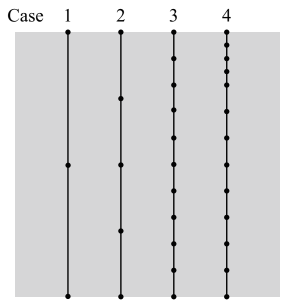
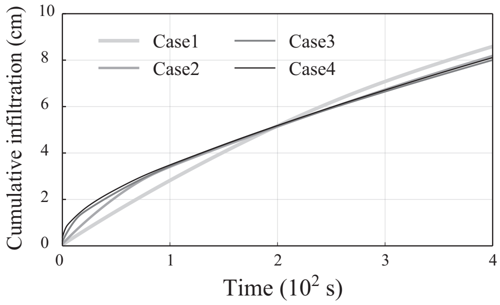
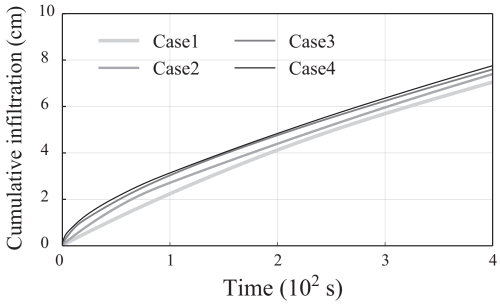


図2：要素分割
Fig.2: Computational grid



(a) LSFEM



(b) Galerkin FEM

図3：累積浸潤量
Fig.3: Cumulative infiltration

4 まとめ

鉛直1次元Richards式に対して，LSFEMを適用した数値モデルの提案を行った．この定式化により，水位境界においても同精度でフラックスを計算でき，地表水と地下水を連成させる場合，矛盾のないモデルを構成することができる．また，LSFEMとGalerkin FEMを用いた計算例では，累積浸潤量に関してLSFEMの方がメッシュ分割に依存せず計算できることが示された．

参考文献 [1] 登坂博行ら（1996）：地下水学会誌，38(4), pp.253-267. [2] VanderKwaak, J.E. and Loague, K. (2001): *Water Resour. Res.*, 37(4), pp.999-1013. [3] Pandy, S. and Huyakorn, P.S. (2004): *Adv. Water Resour.*, 27, pp.361-382. [4] Qu, Y. and Duffy, C.J. (2007): *Water Resour. Res.*, 43, W08419. [5] Jones, J.P. *et al.* (2008): *Water Resour. Res.*, 44, W03407. [6] Takeuchi, J. *et al.* (2010): *Paddy Water Environ.*, (in print). [7] Bo-nan Jiang (1998)：The Least-Squares Finite Element Method, Springer, p.418.