

確率過程モデルに基づいた1次元水路における移流分散方程式  
Advection-Dispersion Equations in One-Dimensional Channels Based on Stochastic Process Models

○宇波耕一\*・河地利彦\*  
Koichi Unami, and Toshihiko Kawachi

1. はじめに

河川や用排水路のような1次元水路における輸送現象を取り扱う際には、平均的な流れによる移流に加えて分散効果を考慮することが必要である。時空間領域における輸送方程式としては、輸送される物質の勾配にそのフラックスが比例することを仮定して分散項を与えているものが多い。しかしながら、その物理的根拠については必ずしも明確でなく、他のモデル化手法との整合性を欠く場合も見受けられる。たとえば、Man and Tsai (2007)は、浮遊土砂の輸送現象について従来型の移流分散方程式を確率微分方程式の形に変換すると、ドリフト項の中に分散係数が現れ、非常に複雑なものとなることを示している。そこでここでは、もっぱら確率過程モデルに基づいて、1次元水路における移流分散方程式を構築することを試みる。あらかじめ1次元確率過程を記述する確率微分方程式ならびにそれに随伴するKolmogorov前進方程式(KFE)について概観した上で、まず、流速に関するLangevin方程式モデルを導く。これによれば、流速は定常過程となるので、1次元水路における保存性溶質粒子の輸送現象も確率過程とみなすことができる。そして、その支配確率微分方程式に随伴するKFEが、単位長さあたりの溶質密度を支配する移流分散方程式となっていることを導く。Langevin方程式モデルについては妥当性の検証が必要であるため、農業用排水路において流速を実測し、正規分布に近い確率分布に従う定常過程となっていることを確認する。

2. 確率微分方程式とKFE

一般の1次元確率過程 $Y$ は、確率微分方程式

$$dY = \beta dt + \alpha dB \quad (1)$$

に支配される。ここに、 $t$ は時間、 $\beta$ はドリフト係数、 $\alpha$ は拡散係数、 $B$ はBrown運動である。時刻 $\tau$ において $\zeta$ に位置していた $Y$ が未来の時刻 $t$ において $y$ 空間の領域 $G$ に存在する確率を、 $P(\tau, \zeta, t, G)$ で表す。この確率は、確率密度関数  $p = p(\tau, \zeta, t, y)$  と

$$P(\tau, \zeta, t, G) = \int_G p(\tau, \zeta, t, y) dy \quad (2)$$

によって関連付けられ、その支配式はKFE

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(\beta p) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\alpha^2}{2} p \right) = 0 \quad (3)$$

であることが知られている(Risken, 1989)。確率過程 $Y$ が定常過程である場合には、その確率分布は(3)の定常解となる。

3. 流速のLangevin方程式モデル

1次元流れの運動方程式において、摩擦力に起因する断面平均加速度は、Manning式によれば

$$\frac{dV}{dt} = -g \frac{n^2 V |V|}{R^{4/3}} \quad (4)$$

で与えられる。ここに、 $t$ は時間、 $V$ は断面平均流速、 $g$ は重力加速度、 $n$ はManningの粗度係数、 $R$ は径深である。断面平均流速 $V$ を平均成分 $\bar{V}$ と変動成分 $V'$ とに分解する。(4)を線型化すれば

$$\frac{dV'}{dt} = -\frac{2gn^2 |\bar{V}|}{R^{4/3}} V' \quad (5)$$

となり、 $V'$ は減衰定数

$$\psi = \frac{2gn^2 |\bar{V}|}{R^{4/3}} \quad (6)$$

で自己減衰することがわかる。実際の乱流における局所的な流速 $W$ の変動成分 $W'$ は、 $V'$ に準じた決定論的な減衰に加えて確率論的な擾乱を受けていると考えられるので、ここでは、(5)を拡張した確率微分方程式

$$dW' = -\psi W' dt + \sigma dB \quad (7)$$

に支配されるものと仮定する。ここに、 $\sigma$ は確率過程 $W'$ の拡散係数である。なお、(7)の形の確率微分方程式はLangevin方程式として知られている。確率過程 $W'$ は $w$ 空間を動くものとするれば、Langevin方程式(7)に随伴するKFEは

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial w}(-\psi w p) - \frac{\partial^2}{\partial w^2} \left( \frac{\sigma^2}{2} p \right) = 0 \quad (8)$$

となる。拡散係数 $\sigma$ が定数の場合、(8)には自明でない $C_0^\infty(\mathfrak{R})$ 級の定常解

$$p = \sqrt{\frac{\psi}{\pi \sigma^2}} \exp\left(-\frac{\psi}{\sigma^2} w^2\right) \quad (9)$$

\*京都大学農学研究科, Graduate School of Agriculture, Kyoto University  
キーワード: 移流分散方程式, 確率過程, 1次元流れ

が存在する. すなわち,  $W'$  は平均0, 分散  $\frac{\sigma}{\sqrt{2\psi}}$  の正規確率分布に従う定常過程となる.

#### 4. 移流分散方程式

前節のLangevin方程式モデルによれば, 1次元水路の  $x$  空間を動く各溶質粒子の位置  $X$  は

$$dX = \bar{V}dt + \frac{\sigma}{\sqrt{2\psi}} dB \quad (10)$$

に支配されることになる.  $x$  空間内の領域  $G$  に含まれる保存性溶質の質量を  $M = M(t, G)$ , 単位長さあたりの密度を  $u = u(t, x)$  とすれば,

$$M(t, G) = \int_G u(t, x) dx \quad (11)$$

の関係が成り立つが, 過去の時刻  $\tau < t$  における密度の分布  $u(\tau, x)$  が与えられていれば

$$\begin{aligned} M(t, G) &= \int_{\mathcal{R}} u(\tau, \xi) P(\tau, \xi, t, G) d\xi \\ &= \int_{\mathcal{R}} u(\tau, \xi) \int_G p(\tau, \xi, t, x) dx d\xi \\ &= \int_G \int_{\mathcal{R}} u(\tau, \xi) p(\tau, \xi, t, x) d\xi dx \end{aligned} \quad (12)$$

と書くこともできる. したがって

$$u(t, x) = \int_{\mathcal{R}} u(\tau, \xi) p(\tau, \xi, t, x) d\xi \quad (13)$$

であり, KFEの線型性より

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{V}u) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\sigma^2}{4\psi} u \right) = 0 \quad (14)$$

であることがわかる. したがって, この移流分散方程式(14)における「分散係数」  $D$  は,

$$D = \frac{\sigma^2}{4\psi} = \frac{\sigma^2 R^{4/3}}{8gn^2 |\bar{V}|} \quad (15)$$

ということになり, 不等流においては方程式の形自体が既往の移流分散方程式とは異なったものとなる.

#### 5. Langevin方程式モデルの検証例

Langevin方程式モデルの妥当性は, 実際の1次元流れにおける流速の変動を調べることによって検証されるべきである. ここでは, 低平地を流れる実際の農業用排水路において, 3次元超音波ドップラー流速計を用いて計測されたデータを用い, 局所的な流速の変動成分が正規分布に近い確率分布に従っていることを確認する. なお, 農業用排水路の詳細は, 中川ら(2006)において報告されている.

計測は, 2006年6月19日に実施した. 流れは非常に緩やかで, 水面勾配を検出することができなかった. 8Hzの3次元流速サンプリングを30秒継続することを計測の1単位とし, これを9:40から10分毎に14単位繰り返した. 図1に, 各計測単位における流速の絶対値を示す.

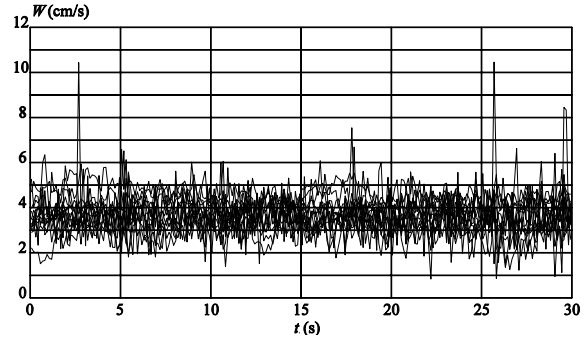


図1: 開水路における流速の実測データ

Figure 1: Observed data of velocity in an open channel

全体で140.5分間の計測期間中, 流れは定常状態とみなしうるものであったので, 計測された流速の絶対値すべてを1つの母集団からの標本と考える. その結果, 標本平均は3.71cm/s, 標本標準偏差は0.78cm/sとなる. 図2に, 標本の分布関数(太線), ならびに, 標本と同じ平均と標準偏差を有する正規分布の分布関数(細線)を示す. 両者はおおよそ合致しているように思われるが, Kolmogorov-Smirnov検定によれば標本が正規分布に従っているという帰無仮説は危険率5%では棄却されるが1%では棄却できない.

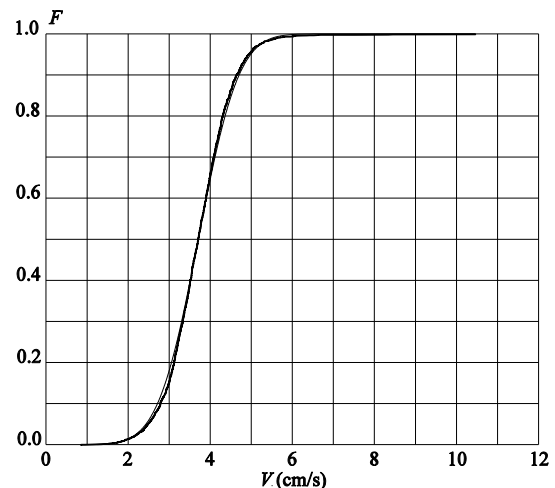


図2: 流速の分布関数に対する適合度検定

Figure 2: Goodness of fit test for distribution function of velocity

#### 6. おわりに

1次元水路における輸送現象を支配する移流分散方程式として, KFEを用いることを提案した. 実験, 実測により, さらに正しいモデルへ修正していくことが必要である.

#### 引用文献

- [1] Man C, Tsai CW (2007): Stochastic partial differential equation-based model for suspended sediment transport in surface water flows. *Journal of Engineering Mechanics*, 133(4):422-430.
- [2] 中川哲平・宇波耕一・河地利彦(2006): 逆解析手法を用いた農業排水路の流れにおける分散係数の推定. 農業土木学会京都支部第63回研究発表会講演要旨集, 26-27.
- [3] Risken H (1989): *The Fokker-Planck equation*. Springer-Verlag, Berlin, 81-86.