開水路 2 次元非定常流の数値解析に関する研究
Chang-Molls 法の境界部計算について

The Study of Computational Analysis for Two-Dimensional Unsteady Open Channel Flows
The Method of Calculating Boundary Stencils by Explicit Chang-Molls Scheme

○戸田和里，島田正志
○TODA Kazusato, SHIMADA Masashi

1. はじめに

近年の温暖化による洪水や渇水に対応可能な緻密な計画と管理，さらに自然環境への配慮など多様な社会的ニーズに応えるため，流れを詳細に捉えることのできる平面 2 次元浅水流数値解析は，より有用な手法が開発されてきた． Chang-Molls 法は，衝撃波などの不連続で発生する数値振動を数値流束の制御による一般的な手法より簡便に抑制し，1 次元問題では差分式と境界条件から境界計算が可能な手法であり，平面 2 次元問題でもその利用が期待される．しかし既往研究による平面 2 次元問題では，基礎方程式を 2 方程式に分けて積分するため厳密な境界計算ができないばかりか境界計算の仕方も不明確である．

そこで本研究では境界計算が可能な 2 次元 Chang-Molls 法を開発することを目的として，差分式を基礎方程式の体積分から直接導出し，数値実験による収束性，安定性など数値解析における基本的な問題について，本手法の可能性を検討した．

2. 基礎方程式

手法の定式化に当たって，本研究では次のような無次元の平面 2 次元浅水流方程式を用いた．

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{U}}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial \hat{\mathbf{F}}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{\mathbf{G}}}{\partial \hat{y}} = \mathbf{0} \tag{1}$$

ここで， $\hat{\mathbf{U}} = \left(\hat{h} \quad \hat{h}\hat{u} \quad \hat{h}\hat{v}\right)^T$ ， $\hat{\mathbf{F}} = \left(\hat{h}\hat{u} \quad \hat{h}\hat{u}^2 + \hat{h}^2/(2Fr^2) \quad \hat{h}\hat{u}\hat{v}\right)^T$， $\hat{\mathbf{G}} = \left(\hat{h}\hat{v} \quad \hat{h}\hat{u}\hat{v} \quad \hat{h}\hat{v}^2 + \hat{h}^2/(2Fr^2)\right)^T$，

$\hat{x} = x/L_0, \hat{y} = y/L_0, \hat{t} = tU_0/L_0, \hat{h} = h/L_0, \hat{u} = u/U_0, \hat{v} = v/U_0, Fr = U_0/\sqrt{gL_0}$,L_0：代表長さ,U_0：代表速度,

h: 水深，u，v：それぞれ流速のx方向，y方向成分，g：重力加速度 である．

3. 体積分による差分式の導出

Fig.1 のように等間隔Δt ,Δx ,Δy に分割した格子図を考える．Chang-Molls 法では時間格子をさらに半分に分け 2 段階計算をするが，1 つの格子点につきベクトル$\mathbf{U}$ とその微分$\mathbf{U}_t$,$\mathbf{U}_x$,$\mathbf{U}_y$ の合計 12 個の変数を持つ．Fig.1 では第 1 段階で最下段の 9 つの格子点の既知変数から中間格子点 K_1～K_4 の未知変数を求め，第 2 段階では同様

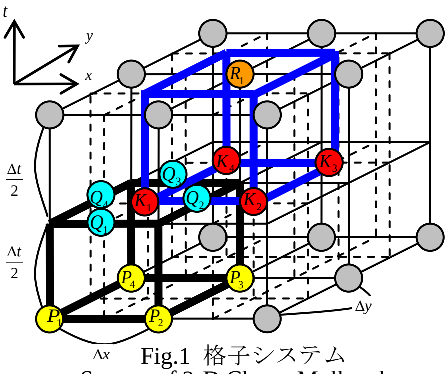

Fig.1 格子システム
System of 2-D Chang-Molls scheme

筑波大学生命環境科学研究科 Graduate School of Life and Environmental Sciences, Univ. of Tsukuba
キーワード：数値流体力学，平面 2 次元非定常流，境界計算

の計算を R_1 に対して行う．差分式の導出は基礎方程式の時空間の体積分を 1 次テイラー展開により計算することで得た．残りの微分量については例えば K_1 の x 微分については Fig.1 の Q_2 と K_1 および Q_4 と K_1 から 2 つの微分量を計算し，符号が異なるときは格子規模の振動すなわち数値振動が発生したと考え，K_1 の微分量を 0 とし，符号が同じときは 2 つの微分量の平均値をとることできわめてシンプルな振動抑制と振動が発生していない時の高次精度化を可能にした．

4. 境界部の数値計算法

境界部の数値計算法を考える．Fig.2 のような x 軸に対して平行な固体壁では 3 つの境界条件が厳密に与えられる．さらに体積分による差分式 6 本と基礎方程式 3 本により未知変数 12 個は連立方程式の解として解くことが可能である．微分量の計算は非境界部と同じだが 1 方向のみの振動抑制が可能である．

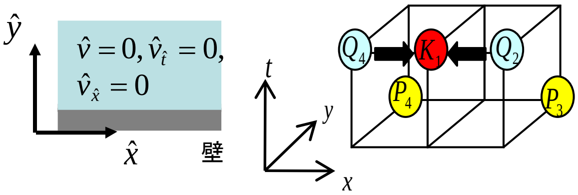

Fig.2　境界条件と境界部格子システム

Boundary condition and boundary system

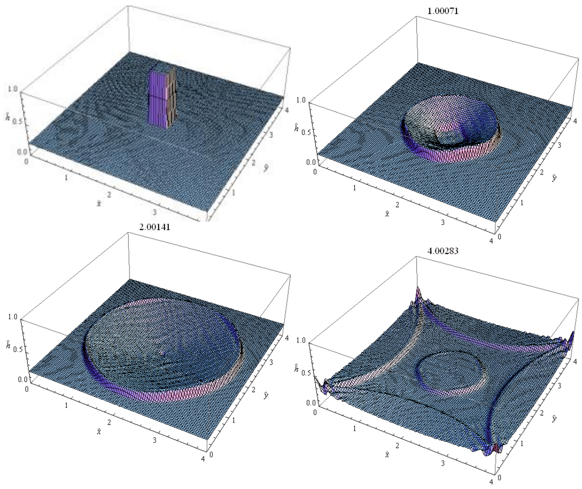

Fig.3　水柱崩壊の鳥瞰図

View of the water surface

5. 数値実験

数値実験は Fig.3 のような水深が 0.2 の静止水中にある 1 辺 0.4，高さ 1.0 の四角水柱が 4×4 の正方形の有限領域内で崩壊するときの波動現象について収束性，安定性について検討をおこなった．ただし，代表長さは水柱高，代表流速は本実験では長波速度を用いた．

収束性は時空間の格子幅を相似に保ちながら小さくしていくことで，一定の解に収束していくことが示された．Fig.4 では次式で定義するクーラン数が 1 以下では安定して数値解が得られることが示された(Fig.4).

$$Cr = \left(\sqrt{\hat{u}^2 + \hat{v}^2} + \sqrt{\hat{h}} \right) \Delta\hat{t} / \Delta\hat{x} \qquad (2)$$

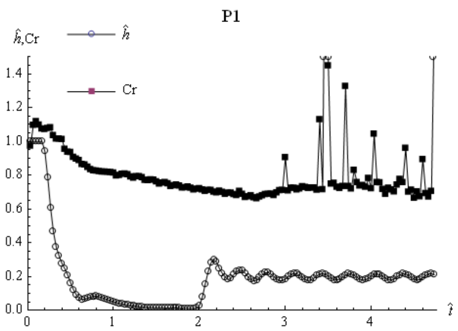

Fig.4　水深(領域中央 P_1)と

最大クーラン数の時間変化 Analytical result

6. まとめ

保存形式基礎方程式を時空間で対称に積分することで非境界部および境界部の 2 次元 Chang-Molls 法の定式化できた．数値実験により，相似な時間空間格子システムに対する収束性，および安定性が示された．これにより，2 次元 Chang-Molls 法の陽解法としての基本的性質と境界計算について可能性を示せた．

参考文献

1) Molls, T. and Molls, F. (1998): Space-time conservation method applied to Saint Venant equations, *J. Hydr. Engrg.*, 124 (5), 501-508.

2) Yee, H. C. (1986): Construction of explicit and implicit symmetric TVD schemes and their applications, *J. Comp. Phys.*, 68, 151-179.