

擬似気泡関数要素に CIP を適用した有限要素モデル Finite Element Model of Shallow Flow Applied the CIP Method to the Quasi-Bubble Function Element

桐 博英* 田中良和* 白谷栄作* 丹治 肇**

KIRI Hirohide, TANAKA Yoshikazu, SHIRATANI Eisaku and TANJI Hajime

1 はじめに

水路網が整備された河口低平農地における氾濫被害の予測では、水路流れを1次元でモデル化し、解析に組み込むのが効果的である。しかし、氾濫災害時には、水利施設近傍など一部に射流を伴う流れが生じるため、常射流が混在する流れを安定に解析できる1次元モデルが求められる。差分法による浅水波流れのモデルでは、中山ら(1998)がCIP法を適用することで常射流が混在する流れを解析するモデルを構築している。本報では、農業水利施設の配置等を忠実に再現可能な有限要素法に対し、安定で再現性の高い解析を行うことを目的として、擬似気泡関数要素とCIP法を用いた浅水波モデルを構築した。

2 モデルの概要

浅水波流れの有限要素解析では、水位と流速を同じ節点で補間する同次補間が用いられてきたが、計算が不安定になるという問題があった。このため、近年では、流速と水深に異なる補関数を用いる混合補間を適用することで計算を安定化させるようになっている。混合補間では、流速の補関数を水位のものより高次にする必要があり、要素の中心に節点を配置した気泡関数要素を使って流速を補間することでこの条件がクリアできる。また、気泡関数要素を線形化した擬似気泡関数要素(Mewis and Holtz,1993)でも一定条件下では流線上流化法を適用したのと等価になることが分かっている。しかし、混合補間を用いた場合でも、常射流混在流れのように不連続が発生する現象を安定に解析するこ

とは保証されない。このため、数値的不安定を生じやすい移流成分を容易に計算でき、数値拡散を防ぐことができるという特徴をもつCIP法を適用した。

基礎方程式

流速と水深をそれぞれ u, h , 重力加速度を g とすると、本モデルで用いる基礎方程式は式(1), (2)で表される。

$$h_t + (hu)_x = 0 \quad (1)$$

$$u_t + uu_x + gh_x = 0 \quad (2)$$

運動方程式(2)にCIP法を適用するため、式(3)、式(4)のように非移流フェーズと移流フェーズに分離する。

$$\text{非移流フェーズ: } \frac{\tilde{u} - u^n}{\Delta t} = -gh_x \quad (3)$$

$$\text{移流フェーズ: } \frac{u^{n+1} - \tilde{u}}{\Delta t} + \tilde{u}\tilde{u}_x = 0 \quad (4)$$

擬似気泡関数要素による定式化

連続式(1)と非移流フェーズの式(3)に対し、擬似気泡関数要素を用いた混合補間を適用する。

有限要素定式化で用いられる水位および流速の補関数は、要素の長さを ℓ とすれば、それぞれ式(5)、式(6)で表され、これらの形状を示したのが Fig.1 である。ここで、下付添え字のうち、数字が節点番号、記号 "b" が擬似気泡点における補関数を示す。

$$\phi_1 = 1 - x/\ell, \quad \phi_2 = x/\ell \quad (0 < x < \ell) \quad (5)$$

$$\psi_1 = \begin{cases} 1 - 2x/\ell & \\ 0 & \end{cases} \quad \psi_2 = \begin{cases} 0 & \\ 2x/\ell - 1 & \end{cases}$$

$$\psi_b = \begin{cases} 2x/\ell & (0 \leq x \leq \ell/2) \\ 2 - 2x/\ell & (\ell/2 \leq x \leq \ell) \end{cases} \quad (6)$$

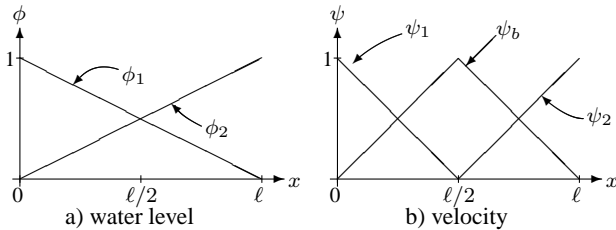


Fig.1 補関関数の形状

CIP法の概要

CIP法は、擬似スプライン関数で表現される流速分布をもとに、流速が $\Delta x = -u\Delta t$ だけ離れた地点から移流したとする。要素内の流速分布は、通常CIP法では3次関数で近似されるが、本モデルでは、各要素の両端の節点に加えて擬似気泡点での値が得られるため、5次関数で補間される。本モデルでは、運動方程式の非移流フェーズを予測子修正子法による2次精度の陽解法、連続式を陰解法により解析した後、移流フェーズの計算を行った。

3 数値解析例

本モデルの検証のため、ダム崩壊流れの解析を行った。対象としたダム崩壊流れ問題の概要をFig.2に示す。本計算例は、延長1,000mの水槽の中央に設けられたセキが瞬時に開放された場合を想定したものである。解析条件は、 $\ell = 10m$ 、 $\Delta t = 0.4s$ であり、計算の安定のための人工粘性は加えていない。ダム崩壊30s後の水深と流速の分布を厳密解と比較したのがそれぞれFig.3とFig.4である。本モデルの解析結果は、段波のフロントで若干の水深のアンダーシュートが見られるものの、厳密解をよく再現できている。

4 まとめ

本報では、擬似気泡関数要素を用いた浅水波流れの有限要素モデルにCIP法を適用したモデルを構築し、解析の安定性を検証した。その結果、本モデルは、シンプルでありながら、CIP

を適用しないモデルで必要だった人工粘性項がなくても安定した解析を行うことができた。また、本モデルでは、常流と射流が混在する状況でも段波の進行を良く再現でき、水利施設を含む水路系への適用が期待される。

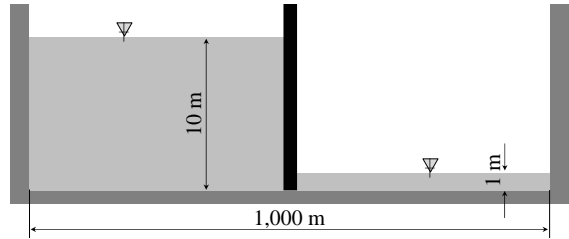


Fig.2 ダム崩壊流れ問題の概要

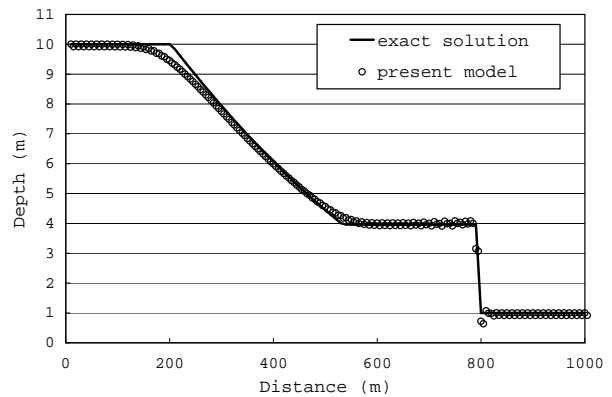


Fig.3 水深分布の比較

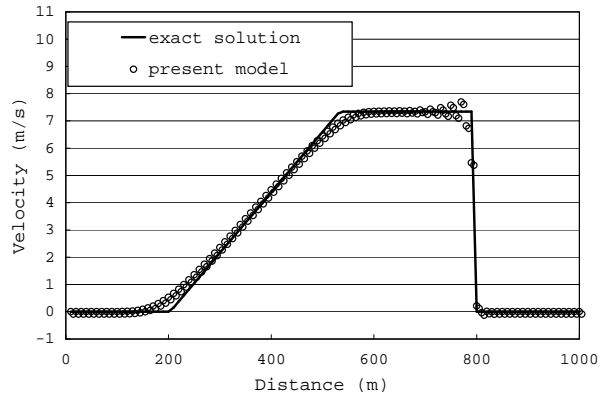


Fig.4 流速分布の比較

参考文献

- Mewis and Holtz,1993) Mewis, P. and K. P. Holtz(1993): A Quasi bubble-function approach for shallow water waves, Advances in Hydro-Science and -Engineering, Vol.1, pp.768-774.
- 中山ら (1998)) 中山恵介, 佐藤圭洋, 堀川康志 (1998): CIP法を用いた浅水流方程式の数値計算手法の開発, 水工学論文集, 第42巻, pp.1159-1164