

CIP 特性直線法による水撃解析と計算格子設計手法の開発

Development of water hammer analysis by the CIP - method of characteristics and calculation lattice design technique

田中良和, 向井章恵, 樽屋啓之

Yoshikazu TANAKA, Akie MUKAI, Hiroyuki TARUYA

はじめに

水撃解析を行う技術者が, 計算格子を容易に作成して解析作業が行えながら, 高精度の解析結果が得られることを目標とした水撃解析手法の開発に向けた基礎的研究を行った.

提案する手法は, 特性直線法の空間補間に CIP 法 (Yabe, 1991) を適用し, 境界条件に適切な空間一階微分値を設定した. 本手法の空間補間誤差の理論式を線形安定性解析により導出して, 数値実験結果との比較から妥当性を検証した. 計算格子の設計には, 離散化誤差の評価も必要であるが, 空間補間誤差のみに基づいて計算格子の設計方法を提案した.

CIP特性直線法

管路の水撃現象は, 移流項, 摩擦損失, 管路延長方向の圧力水頭差の影響, および管路の勾配を無視して, 圧力水頭 H と管内平均流速 V とすると次式で表現される.

$$g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \qquad \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

次ステップの流速 V_M^{n+1} と圧力 H_M^{n+1} は, C^+ と C^- を重ね合わせることによって, 次式になる.

$$V_M^{n+1} = \frac{1}{2} \left[V_R^n + V_S^n + \frac{g}{a} (H_R^n - H_S^n) \right] \qquad H_M^{n+1} = \frac{1}{2} \left[H_R^n + H_S^n + \frac{a}{g} (V_R^n - V_S^n) \right]$$

特性線が計算格子点上を通過しない時, 空間補間法として, CIP 法を適用した.

$$f_i^{n+1} = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d \qquad g_i^{n+1} = 3a_i x^2 + 2b_i x + c_i$$

ただし, $a_i = \frac{g_i + g_{i-1}}{D^2} + \frac{2(f_i - f_{i-1})}{D^3}$, $b_i = \frac{-3(f_i - f_{i-1}) - 2g_i + g_{i-1}}{D^2}$, $c_i = g_i$, $d_i = f_i$ である.

誤差解析と検証

CIP 法が 3 次のエルミート補間関数を用いて次式に変形できる.

$$f_i^{n+1} = H_{0,0}(\tau) f_i^n + H_{0,1}(\tau) f_{i-1}^n + H_{1,0}(\tau) g_i^n + H_{1,1}(\tau) g_{i-1}^n$$

ただし, $H_{0,0}(\tau) = 2\tau^3 - 3\tau^2 + 1$, $H_{0,1}(\tau) = -2\tau^3 + 3\tau^2$, $H_{1,0}(\tau) = \tau^3 - 2\tau^2 + \tau$, $H_{1,1}(\tau) = \tau^3 - \tau^2$ である.

線形安定性解析より, CIP 法の数値振幅減衰 R_1 と数値分散誤差 R_2 は, 次式が導出される.

$$R_1 = \left\{ C^2 + D^2 + 2CD \cos(A' - B') \right\}^{2(\tau+n-1)} \qquad R_2 = \frac{\tan^{-1} \left\{ \frac{H_{0,0} \sin A + H_{0,1} \sin B + H_{1,0} \sigma_k \cos A + H_{1,1} \sigma_k \cos B}{H_{0,0} \cos A + H_{0,1} \cos B - H_{1,0} \sigma_k \sin A - H_{1,1} \sigma_k \sin B} \right\}}{\sigma_k \Delta x (\tau + n - 1)}$$

ただし, $A = \sigma_k (n-1) \Delta x$, $B = \sigma_k n \Delta x$, $A' = A + \alpha$, $B' = B + \beta$, $C = \sqrt{(H_{1,0} \sigma_k)^2 + H_{0,0}^2}$, $D = \sqrt{(H_{1,1} \sigma_k)^2 + H_{0,1}^2}$,

$$\alpha = \frac{H_{1,0}\sigma_k}{C}, \quad \beta = \frac{H_{1,1}\sigma_k}{D} \text{ である.}$$

上流端が水槽，下流端が弁である単一管路システムの直線弁閉塞問題を例として空間補間誤差を検証した．管は延長 3,300m，内径 0.9m，伝播速度 1,100m/s とした．末端の弁では，初期水位 90m，初期流速 1.2m/s とした．理論式 R_l と波長と格子幅の比 $L_k/\Delta x$ の関係は Fig.1 となり， $L_k/\Delta x$ が 1 付近の高周波成分は増幅する傾向があるが，低周波成分は線形補間法に比べて非常に精度が高い．計算格子数 M を 2 個とした数値実験結果は，理論式に従って、良好な解を得た (Fig.2)．ここで， L_k は管の固有波長の第 k 成分， Δx は計算格子幅， CFL (=伝播速度×時間ステップ幅/ Δx) は数値安定性を表す指標である．

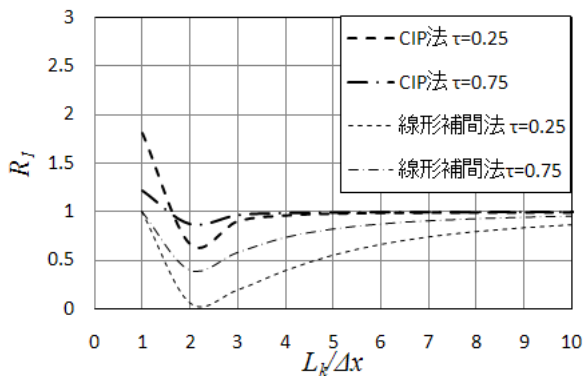


Fig.1 1タイムステップあたりの数値振幅減衰 R_l

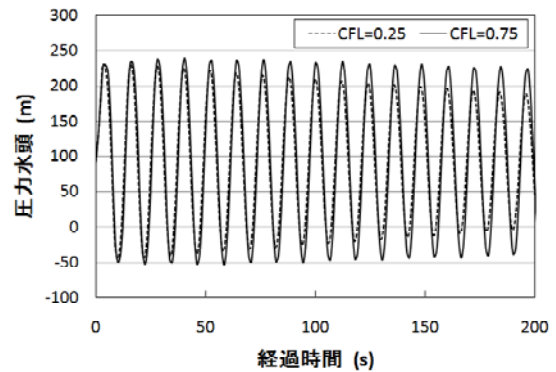


Fig.2 末端弁における圧力水頭の時系列変化 ($M=2$)

計算格子の設計

CIP 法の特徴を利用して，極端に短い管と相対的に長い管が接続されている複数管路システムにおいて等間隔計算格子を設計する単純な方法を以下のように提案した．

①最短の管は，計算格子数 $M=1$ ， $CFL=1.0$ とする．よって，最短の管の延長と伝播速度によって，時間ステップの幅が決定する．

②相対的に長い管は， CFL 数が 0.4 以上 1.0 以下を満たすように，計算格子数 M を決定する．

管の延長 = {2,277, 33, 990}，伝播速度 = {1,100, 1,100, 1,100}，管径 = {1.0, 0.75, 0.5} とした複数管路システムの直線弁閉塞問題を例として空間補間誤差を検証した (Fig.3)． CFL 数が 0.4 から 0.8 の圧力水頭は，鋭いピーク値も減衰せず，厳密解にほぼ一致する．しかし，計算を長い間継続すると，圧力水頭の増幅と減衰が顕著になる．長時間の計算においては，対策が今後必要である．

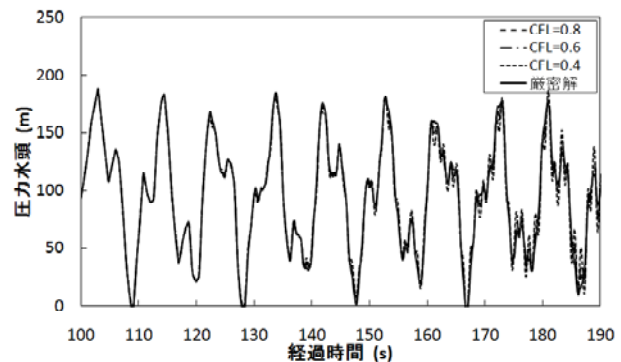


Fig.3 末端弁における圧力水頭の時系列変化 (複数管路)

まとめ

本手法は，計算時間が比較的長くなる欠点はあるが，単純であり，高精度の水撃圧を得られるため，技術者が計算格子幅の決定する作業を容易にさせることが期待できる．