非等温土壌における地下水浸透流の逆解析手法
Inverse Modeling of Seepage Flow in Non-isothermal Soil

○泉 智揮 *・藤原 正幸 *・竹内 潤一郎 **・河地 利彦 **
○Tomoki Izumi, Masayuki Fujihara, Junichiro Takeuchi and Toshihiko Kawachi

1. はじめに

近年の計算機の発達により，実験的手法に比べコストや労力の面で有利な数値解析手法が注目されており，数値シミュレーションモデルの開発が多くなされている．シミュレーションモデルには対象とする物理現象の高い再現性が求められるが，そのためには，その物理現象を適切に記述する支配方程式を用いることと，支配方程式に含まれるモデルパラメータを適切に同定することが重要である．

地下水浸透流の支配方程式には，一般に，Richards 式が用いられるが，これまで著者らは，その中でも水収支の保存性が高い Mixed Form Richards 式の逆解析手法を提案している [1]．しかしながら，実際の観測データや手法の検証結果から，著者らが対象とする表層土壌においては，地温による水分移動への影響を考慮する必要が示唆された．

そこで本報告では，水分移動に Mixed Form Richards 式，熱輸送に熱伝導方程式を用いた水分 - 熱連成モデルを定式化し，そのモデルパラメータである不飽和透水係数について逆解析による同定手法を提案する．

2. 逆問題の定式化

同定すべき不飽和透水係数は飽和透水係数と相対透水係数の積で表される．このうち飽和透水係数が透水試験等により与件されるとき，逆問題は，相対透水係数を未知変数として，以下に定義する目的関数の最小化問題として定式化され，シミュレーション最適化手法により求解される．

2.1 相対透水係数

相対透水係数は，有効飽和度の関数とし，関数形状について自由度の高い自由形式によるパラメータ化手法を用いて表現される [1]．

$$K_\mathrm{r}\left(S_\mathrm{e}\right)=\sum\nolimits_i K_{\mathrm{r},i}\left(S_\mathrm{e}\right) \tag{1}$$

ここで，K_r は相対透水係数，S_e は有効飽和度，$K_{\mathrm{r},i}$ は K_r の第 I 区間における区分的多項式関数で以下のような三次スプライン関数とする．

$$K_{\mathrm{r},i}(S_\mathrm{e})=\begin{cases} a_i^k+b_i^k\left(S_\mathrm{e}-S_{\mathrm{e},i}\right)+c_i^k\left(S_\mathrm{e}-S_{\mathrm{e},i}\right)^2 & \\ +d_i^k\left(S_\mathrm{e}-S_{\mathrm{e},i}\right)^3 & S_\mathrm{e}\in\left[S_{\mathrm{e},i},\ S_{\mathrm{e},i+1}\right] \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases} \tag{2}$$

ここで，a_i^k，b_i^k，c_i^k，d_i^k は三次スプラインにおける係数である．

2.2 最小化問題

解くべき逆問題は，未知変数の集合を $\boldsymbol{k}$ とすると，以下のような順問題の解 $\psi^\mathrm{com}(\boldsymbol{k})$（計算値）と観測値 ψ^obs との二乗誤差の総和（目的関数）を最小化する最適化問題となる．

$$J\left(\boldsymbol{k}^\mathrm{opt}\right)=\min J\left(\boldsymbol{k}\right) \tag{3}$$

$$J\left(\boldsymbol{k}\right)=\frac{1}{2}\sum_l^L\left(\psi_l^\mathrm{com}\left(\boldsymbol{k}\right)-\psi_l^\mathrm{obs}\right)^2 \tag{4}$$

ここで，$\boldsymbol{k}^\mathrm{opt}$ は最適解，L は観測データ数である．

2.3 最適化アルゴリズム

最適化アルゴリズムには，Gauss-Newton 法と勾配法を組み合わせた Levenberg-Marquardt 法を用い，未知変数 $\boldsymbol{k}$ を修正しながら順問題を繰返し解き，最終的に最適解 $\boldsymbol{k}^\mathrm{opt}$ を決定する．

$$\boldsymbol{k}^{\gamma+1}=\boldsymbol{k}^\gamma+\Delta\boldsymbol{k}^\gamma \tag{5}$$

$$\Delta\boldsymbol{k}^\gamma=-(\boldsymbol{H}^\gamma+\eta\boldsymbol{I})^{-1}\nabla J(\boldsymbol{k}^\gamma) \tag{6}$$

$$\boldsymbol{H}^\gamma=\left[\sum_{l=1}^L\frac{\partial f_l^\gamma}{\partial k_i^\gamma}\frac{\partial f_l^\gamma}{\partial k_j^\gamma}\right] \tag{7}$$

$$f_l^\gamma=\psi_l^\mathrm{com}(\boldsymbol{k})-\psi_l^\mathrm{obs} \tag{8}$$

ここで，γ は反復回数，η は係数，$\boldsymbol{I}$ は単位行列である．

3. 順問題の定式化

3.1 水分 - 熱連成モデル

水分移動を支配する飽和 - 不飽和 Mixed Form Richards 式は，以下のように表わされる．

$$\phi\frac{\partial S_\mathrm{w}}{\partial t}+S_\mathrm{w}S_\mathrm{s}\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial z}\left(-K\frac{\partial h}{\partial z}\right) \tag{9}$$

ただし，

$$S_\mathrm{s}=\rho_\mathrm{w}g\left(\beta_\mathrm{s}+\phi\beta_\mathrm{w}\right) \tag{10}$$

$$K=K_\mathrm{s}K_\mathrm{r} \tag{11}$$

$$K_\mathrm{s}=\frac{\kappa}{\mu(T_\mathrm{s})}\rho_\mathrm{w}g \tag{12}$$

$$\rho_\mathrm{w}=\rho_0\left(1-\beta_\mathrm{w}\left(T_\mathrm{s}-T_0\right)\right) \tag{13}$$

* 愛媛大学農学部，Faculty of Agriculture, Ehime University.
** 京都大学大学院農学研究科，Graduate School of Agriculture, Kyoto University.
キーワード：不飽和透水係数，自由形式パラメータ，水分 - 熱連成モデル，シミュレーション最適化法

ここで，ϕ は間隙率，S_w は飽和度，t は時間，S_s は比貯留量，ψ は圧力水頭，z は鉛直座標（上向きを正），K は不飽和透水係数，$h(=\psi+z)$ は全水頭，ρ_w は水の密度，β_s は土の圧縮率，β_w は水の圧縮率，K_s は飽和透水係数，κ は固有透過度，μ は粘性係数，T_s は地温，ρ_0 と T_0 はそれぞれ基準密度と基準地温である．

また，土壌水分保持特性を表わす圧力水頭と体積含水率との関係には，以下のような van Genuchten [2] のモデルを採用する．

$$S_\mathrm{e}=\frac{\theta-\theta_\mathrm{r}}{\theta_\mathrm{s}-\theta_\mathrm{r}}=[1+|\alpha\psi|^n]^{-m} \tag{14}$$

ここで，θ は体積含水率，θ_s は飽和体積含水率（間隙率），θ_r は残留体積含水率，α，n，m は形状パラメータであり，$m=1-1/n$ の関係にある．

熱輸送を支配する方程式は，以下のように表わされる [3].

$$C_\mathrm{h}\frac{\partial T_\mathrm{s}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial z}\left(-\lambda\frac{\partial T_\mathrm{s}}{\partial z}\right) \tag{15}$$

ただし，

$$C_\mathrm{h}(\theta)=(1-\theta_\mathrm{s})c_\mathrm{s}+\theta c_\mathrm{w} \tag{16}$$

$$\lambda=\lambda_0+0.5\theta^{\frac{1}{3}} \tag{17}$$

ここで，C_h は体積熱容量，λ は熱伝導率，c_s と c_w はそれぞれ土壌と水の体積熱容量である．

この支配方程式に対して空間方向には Galerkin 有限要素法，時間方向には有限差分法を用いて離散化し，初期条件，境界条件を与えて求解する．

4. 検証

本手法を 2010 年 11 月 25 日から 12 月 2 日の無降雨期間に畑地（砂質土壌）において観測された土壌水分量のデータを用いて検証する．観測システムの概要と計算領域の要素分割を図 1 に示す．観測項目は圧力水頭，体積含水率，地温の 3 項目で，それぞれ地下 10cm，20cm，30cm の 3 地点で観測する．計算領域は 10cm から 30cm の領域とし，観測データのうち，圧力水頭については，上下端のデータを順問題における Dirichlet 境界として与え，中央のデータを逆問題におけるモデルフィッティングのためのデータとして用い，体積含水率については，同じ深度の圧力水頭のデータとともに (14) 式における土壌水分保持特性の同定に用い，地温については，上下端のデータを順問題における Dirichlet 境界として与え，中央のデータは地温に関する順問題の解のベンチマークデータとして用いる．

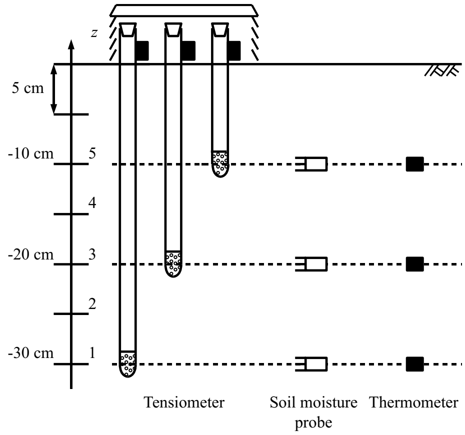

図 1: 観測システムの概要
Fig.1: Observation system

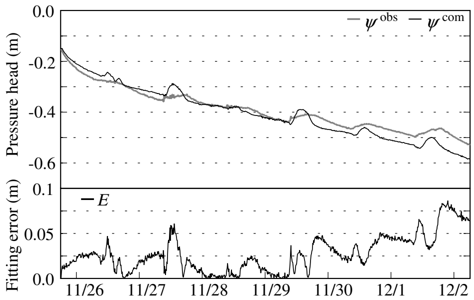

図 2: 観測データとの比較
Fig.2: Reproduction accuracy of forward solution

同定された不飽和透水係数による観測データの再現結果を図 2 に示す．図より，本手法により同定された不飽和透水係数を用いた順問題の解は，観測データについて高い再現性を示している．

5. まとめ

水分 - 熱連成モデルを支配式とする浸透流解析における不飽和透水係数の同定手法を開発し，その精度を検証した．その結果，本手法の有効性が示された．

引用文献

[1] 泉 智揮・藤原正幸・竹内潤一郎・河地利彦 (2010) : 水収支を考慮した浸透流解析における不飽和透水係数の同定手法，平成 22 年度農業農村工学会大会講演会講演要旨集
[2] van Genuchten, M.Th. (1980) : A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils, *Soil Sci. Soc. Am. J.*, **44**, pp. 892-898.
[3] Kondo, J. and N. Saigusa (1994): Modeling the evaporation from bare soil with a formula for vaporization in the soil pores, *J. Meteor. Soc. Jpn.*, **72**, pp.413-421.