

乱流場における溶質輸送の確率過程モデルと付随する放物型輸送方程式

A stochastic process model for solute transport in turbulence and associated parabolic transport equation

○吉岡 秀和*・宇波 耕一*・河地 利彦*

Hidekazu Yoshioka, Koichi Unami and Toshihiko Kawachi

1. はじめに

河川や湖沼に代表される地表水系における熱や溶質の輸送は乱流現象に支配されている。一般に、乱流輸送現象の解析には決定論的な保存則および勾配則から導出される移流拡散型方程式(ADE)が用いられる。しかしながら、それらは決定論的に状態量の時空間発展を記述するものであり、現象の数理的記述と数値解析技法の境界が不明瞭であるものが散見される。これに対し、乱流現象が本質的に不確実性を有する現象であるという観点から、確率微分方程式(SDE)に基づいた数理モデルを用いて物質輸送を議論した研究も存在する。たとえば、Charles et al. (2009)は二次元浅水乱流場における溶質の輸送現象を支配するSDEおよびその離散化スキームの提案を行っている。また、吉岡ら(2010)はKolmogorov後退方程式(KBE)に基づいて次元開水路における溶質の脱出確率および平均滞留時間の有限要素解析を行い、その有効性を示している。

ここではまず、乱流場における溶質粒子のLagrange的挙動を記述する確率過程モデルを提案する。次いで、モデルに基づいて新たに局所的流速の定義を行う。その際、モデルに含まれる乱流拡散係数と局所的流速を陽的に関連付ける。また、実際の乱流場における乱流拡散係数の推定を行う。最後に、モデルに付随するKolmogorov前進方程式(KFE)より、勾配則を用いることなく溶質の放物型輸送方程式を導出する。

2. 溶質輸送の確率過程モデル

n 次元乱流場における溶質粒子のLagrange的な位置 $\mathbf{X}_t = [X_i]$ のMarkov性を仮定すると、確率過程 \mathbf{X}_t の時間発展は伊藤型SDE

$$d\mathbf{X}_t = \bar{\mathbf{V}}(t, \mathbf{X}_t) dt + \sqrt{2\mathbf{D}(t, \mathbf{X}_t)} d\mathbf{B}_t \quad (1)$$

により記述される。ここに、 t は時間、 $\bar{\mathbf{V}} = [\bar{V}_i]$ は n 次元回帰流速ベクトル、 $\mathbf{D} = [D_{ij}]$ は $n \times n$ 次元乱流拡散係数で正定値行列、 $\mathbf{B}_t = [B_i]$ は n 次元標準Brown運動である。溶質粒子の初期位置 \mathbf{X}_0 に対し、任意時刻 t における位置 \mathbf{X}_t は伊藤積分を含んだ

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{X}_0 + \int_0^t \bar{\mathbf{V}}(s, \mathbf{X}_s) ds + \int_0^t \sqrt{2\mathbf{D}(s, \mathbf{X}_s)} d\mathbf{B}_s \quad (2)$$

となる。時刻 s において $\mathbf{y} = [y_i]$ に位置していた粒子が未来の時刻 $t > s$ において任意の閉集合 $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^n$ の内部に位置する条件付確率を $P(t, \mathbf{K}, s, \mathbf{z})$ で表す。確率密度関数 $p(t, \mathbf{x}, s, \mathbf{y})$ は

$$P(t, \mathbf{K}, s, \mathbf{y}) = \int_{\mathbf{K}} p(t, \mathbf{x}, s, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (3)$$

を満たすように定められる。Risken (1989)によれば、SDE(1)に付随するKFEおよびKBEは $p = p(t, \mathbf{x}, s, \mathbf{y})$ の支配方程式であり、

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{V}_i p) - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (D_{ij} p) = 0 \quad (4)$$

および

$$\frac{\partial p}{\partial s} + \bar{V}_i \frac{\partial p}{\partial y_i} + D_{ij} \frac{\partial^2 p}{\partial y_i \partial y_j} = 0 \quad (5)$$

で与えられる。

3. 局所的流速および乱流拡散係数

溶質粒子は流れ場を受動的に移動すると仮定し、粒子の速度と流速を同一視する。位置 \mathbf{X}_t は伊藤積分を含むため、粒子はいたるところ連続でありながら微分不可能な経路を移動する。いま、微小な離散時間 $\Delta t > 0$ に対する粒子の位置変化率

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{\text{obs}, t} &= \frac{\mathbf{X}_{t+\Delta t} - \mathbf{X}_t}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \bar{\mathbf{V}} ds + \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \sqrt{2\mathbf{D}} d\mathbf{B}_s \end{aligned} \quad (6)$$

を考える。(6)において $\Delta t \rightarrow 0$ とした場合が本来の流速の定義となる。有限な Δt においても $\mathbf{V}_{\text{obs}, t}$ を局所的流速の観測値とみなすと、時間的に一様な乱流場においては、 $\mathbf{V}_{\text{obs}, t}$ の平均値は $\bar{\mathbf{V}}$ 、共分散行列 Σ は

$$\Sigma = \frac{2}{\Delta t} \mathbf{D} \quad (7)$$

により与えられる。なお、浅水乱流を含む多くの乱流場においては乱れのGauss性が報告されており(Nikora et al., 2007)、 $\mathbf{V}_{\text{obs}, t}$ も n 次元結合Gauss過程となる。このとき、局所的流

*京都大学農学研究科 Graduate school of Agriculture, Kyoto University

キーワード：乱流，確率過程，輸送方程式

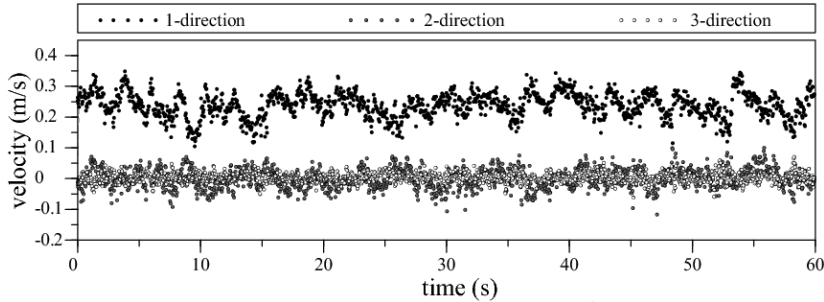


図1:局所的流速の時系列データ

速の離散的な観測値 $\mathbf{V}_{\text{obs},i\Delta t}$ ($i=1,2,\dots,N$) が与えられていれば, \mathbf{D} はErgodic性の仮定から

$$\mathbf{D} = \frac{\Delta t}{2N} \sum_{i=1}^N \left(\mathbf{V}_{\text{obs},i\Delta t}^T \mathbf{V}_{\text{obs},i\Delta t} - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{V}_{\text{obs},j\Delta t}^T \mathbf{V}_{\text{obs},j\Delta t} \right)^2 \quad (8)$$

により近似できる.

4. 実際の乱流場における乱流拡散係数

推定式 (8) に基づき, トレーサー実験を用いることなく実際の三次元乱流場における乱流拡散係数 \mathbf{D} を推定する. 流速の時系列データは, 京都市内の農業用排水路において三次元ドップラー流速計により採取された. 測定に用いたデータ数 N は1500, サンプリング間隔 Δt は0.04(s)である. 各流速データは Δt 間の時間平均値で出力されるために, 厳密には (6) で定義する局所的流速とは異なるが, ここでは両者を同一視する. 図1に, 得られた流速の時系列データを示す. ただし, 主流方向を x_1 , それに直交する水平方向を x_2 , 鉛直上向きを x_3 とする. 各方向における回帰流速 \bar{v} (m/s) は $\bar{v}_1 = 0.24$, $\bar{v}_2 = 0.00$, $\bar{v}_3 = 0.00$ である. 表1に, \mathbf{D} の推定結果を示す. 表1より, 得られた \mathbf{D} の値は既往の研究に示されている値より1~2オーダー小さいことが見て取れる. これは流速計の分解能によるものであり, より短いサンプリング間隔を用いれば, \mathbf{D} の値は大きく変化することが予想される.

表1:乱流拡散係数の推定結果

(i, j)	(1, 1)	(2, 2)	(3, 3)	(1, 2)	(2, 3)	(1, 3)
$D_{ij} \times 10^{-6} (\text{m}^2/\text{s})$	26	16	8.5	-1.9	-1.3	-2.5

5. 溶質の放物型輸送方程式

KFE (4) の線型性を用い, \mathbf{X} のMarkov性に基づいて溶質の輸送方程式を導出する. まず, 位置 \mathbf{x} における溶質濃度を $C(t, \mathbf{x})$ とおく. 時刻 $s < t$ における溶質分布 $C(s, \mathbf{r})$ が与えられていれば, 時刻 t での \mathbf{x} 空間内における任意の閉集合 G に含まれる溶質の質量 $M = M(t, G)$ は

$$\begin{aligned} M(t, G) &= \int_{\mathbb{R}^n} C(s, \mathbf{r}) P(t, G, s, \mathbf{r}) d\mathbf{r} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} C(s, \mathbf{r}) \int_G p(t, \mathbf{x}, s, \mathbf{r}) d\mathbf{x} d\mathbf{r} \quad (9) \\ &= \int_G \int_{\mathbb{R}^n} C(s, \mathbf{r}) p(t, \mathbf{x}, s, \mathbf{r}) d\mathbf{r} d\mathbf{x} \end{aligned}$$

を満足する. G の任意性を考えると

$$C(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} C(s, \mathbf{r}) p(t, \mathbf{x}, s, \mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (10)$$

を得る. KFE (4) および (10) を用いると, 溶質濃度 C に関する輸送方程式

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{V}_i C) - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (D_{ij} C) = 0 \quad (11)$$

を得る. (11) は線型放物型方程式であるため, 既往のADEに対して有効な数値解析手法が適用可能である. なお, 水深平均および断面平均された浅水流場における溶質輸送を考える場合には, $C(t, \mathbf{x})$ を各々 $h(t, \mathbf{x})C(t, \mathbf{x})$ および $A(t, \mathbf{x})C(t, \mathbf{x})$ で置換すれば, 各問題に対応した型の輸送方程式を得る. ここに, h は水深, A は断面積である.

6. おわりに

溶質粒子のLagrange的挙動を記述する確率過程モデルを提案した. 同時に, 有限な離散時間に対し局所的流速を定義した. その際, 局所的な乱流拡散係数が流速の時系列データより推定可能であることを示した. また, 付随するKFEより溶質の放物型輸送方程式を導出した. 今後は, 得られたKolmogorov方程式および輸送方程式に基づいて乱流輸送現象に対する理論的アプローチを行う.

引用文献

- [1] Charles, W.M., van den Berg, E., Lin, H.X., Heemink, A.W. (2009) Adaptive stochastic scheme in parallel random walk models for transport problems in shallow water. *Mathematical and Computer Modelling*, Vol.50, 1177-1187. [2] Nikora, V., Nokes, R., Veale, W., Davidson, M., Jirka, G.H. (2007) Large-scale turbulent structure of uniform shallow free-surface flows. *Environmental Fluid Mechanics*, Vol.7, 159-172. [3] Risken, H. (1986) *The Fokker-Planck equation*. Springer-Verlag, Berlin, 81-86. [4] 吉岡秀和・宇波耕一・河地利彦 (2010) 1次元開水路における局所的流速場の確率過程モデルと移流分散現象解析への応用. 平成22年度応用水理研究部会講演集, 30-33.