非一様開水路 1 次元流れ計算へ拡張した時空間的保存法の評価
Evaluation of Space-Time Conservation Method Extended to One-Dimensional Flows in Open Channels with Irregular Geometry

○木村匡臣*，久保成隆*，飯田俊彰*，島田正志**
○KIMURA Masaomi *，KUBO Naritaka*，IIDA Toshiaki*，SHIMADA Masashi**

1. はじめに

近年，多自然型の河川・水路づくりが各地で進められており，河道断面形状を様々に変化させるなどの工夫が必要とされている．そこで，一様でない断面形状を持つ用排水路や自然河川において，様々な水理現象を正確に把握し，送排水の効率を検討する必要性が増してきている．本研究では，1 次元非定常流計算手法の中から，木村ら[1]によって非一様開水路流れ計算へ拡張された時空間的保存法（Chang 法）[2][3]に着目し，流れの非定常過程における計算結果から手法の評価を試みた．

2. 基礎方程式

本研究で用いる基礎方程式は，非一様断面開水路非定常流の連続式と運動量式を組み合わせた，次のベクトル方程式（Saint-Venant equations）である．

$$\partial \mathbf{U} / \partial t + \partial \mathbf{G} / \partial x = \mathbf{S} \tag{1}$$

ここで，$\mathbf{U} = (A, Q)^{\mathrm{T}}$：保存変数，$\mathbf{G} = (Q, Q^2/A+P_1)^{\mathrm{T}}$：物理流束，$\mathbf{S} = (0, P_2+gA(S_0\text{-}S_f))^{\mathrm{T}}$：湧き出し項，$A$：断面積，$Q$：流量，$P_1$：断面に働く静水圧項，$P_2$：側面に働く静水圧の流下方向分力項，$g$：重力加速度，$S_0$：水路勾配，$S_f$：摩擦勾配である．

3. Chang 法の原理

保存形システム方程式の離散化手法の 1 つである Chang 法は，半ステップずつの時空間格子内の領域において，物理量の分布を 1 次のテイラー展開により近似して保存形の方程式を積分し，この計算を 2 段階行うことにより未知の格子点の **U** を求めるものである（**Fig.1**）．**Fig.1** において，破線矢印は解の求まる方向を示している．基礎方程式(1)は，空間的な非一様性を持つために，**G** や **S** が，**U** と x（流下方向距離）を変数とする関数となる．木村ら[1]は，Chang 法のアルゴリズム中に断面形状の非一様性を表す項を考慮して組み込み，非一様開水路における流れを表現可能なスキームへと拡張した．この Chang 法は，常流・射流の混在流れで生じやすい数値振動を抑制する Flux Limiter Function の計算が，3 点の情報を用いて行うことができ，さらに，内点と同様の原理を用いた単純明快な境界部計算が可能であるという特長を持っている[4]．

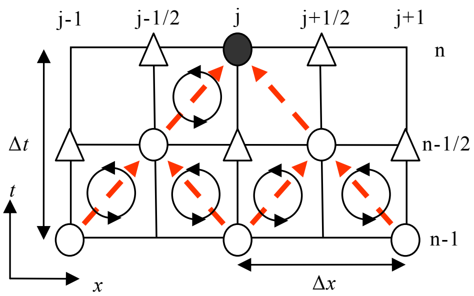

Fig.1 格子システム
Grid system

*東京大学大学院農学生命科学研究科 Grad. Sch. of Agricultural and Life Sciences, The Univ. of Tokyo
**筑波大学大学院生命環境科学研究科 Grad. Sch. of Life and Environmental Sciences, Univ. of Tsukuba
キーワード：数値流体力学，非一様開水路 1 次元流れ計算，時空間的保存法

4. 評価方法

非一様開水路での流れの非定常過程における理論解は解明されていないが，収束性を満足するスキームであれば，計算格子幅をより細かく設定することによって，厳密解により近い数値解を得ることが可能である．また，格子幅を細かくしていった際にどの程度速く厳密解へと近づいていくかは，離散化スキームの精度に対応している．本研究では，非一様台形開水路におけるダム破壊波を対象とし，拡張した Chang 法（3 点法）と，他の 1 次元流れ計算手法の 1 つである FDS 法（5 点法）[5]，そこから Flux Limiter Function を取り除いて 3 点法とした FDS 法の 3 種類の計算手法を用いて，様々な格子幅により計算を行い，収束程度の比較を行った．対象とした水路は **Table 1** に示すような水路底幅，法面勾配を有する非一様台形開水路で，初期条件は，流量は 0m^3/s，水位は x = 500m 地点より上流側では 10m，下流側では計算上の微少量（1×10^{-8}m）を与えた．時空間格子幅は，Δx / Δt = 40m/s で一定とし，様々な格子幅で 20 秒分の計算を行った（**Fig. 2**）．Δt = 0.000125s（時間ステップ数：160,000），Δx = 0.005m（空間ステップ数：200,000）としたときの，Chang 法，FDS 法（5 点法）による計算結果をそれぞれのスキームの収束解とし，次式で定義される L_2 ノルムにより相対誤差の評価を行った．

$$L_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{J}\left(h_j - h_{Bj}\right)^2 \Big/ \sum_{j=1}^{J} h_{Bj}^{\,2}} \qquad (2)$$

ここで，J は空間格子数，h_B は収束解である．

Table 1 台形開水路諸元
Dimensional data of trapezoidal channel

x（m）	0	1000
水路底幅 B_0（m）	100	500
法面勾配 1 : m	1 : 0	1 : 10
B_{0x}	0.4	
m_x	0.01	

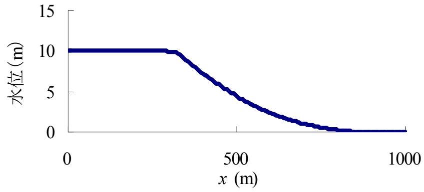

Fig. 2 20 秒後の水面形
Water surface profile after 20 seconds

5. 結果と考察

空間格子幅に対する相対誤差の変化を **Fig. 3** に示す．なお，本手法と FDS 法（5 点法）の収束解間の相対誤差は L_2 = 1.1×10^{-5} であり，ほぼ一致していることが確認された．**Fig. 3** より，3 点法である本手法と 5 点法を用いる FDS 法は，格子幅を狭くした際の解の収束程度が類似していることがわかる．これより，非一様開水路流れの計算における精度は，両手法でほぼ同等であることが明らかになった．また，本手法は同じ 3 点法の FDS 法に比べて精度が高いことが推測される．これは，3 点法の FDS 法は Flux Limiter Function の計算が不可能であり高次精度を保つことができないが，Chang 法は 3 点の情報により Flux Limiter Function の計算が可能であることが大きな原因であると考えられる．

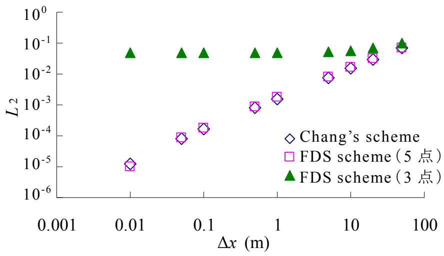

Fig. 3 空間格子幅と相対誤差 L_2
Spatial step size and relative error L_2

参考文献

[1] 木村匡臣，島田正志，田中忠次（2008）：平成 20 年度農業農村工学会大会講演会講演要旨集，324-325.
[2] Chang, S. C. (1995): *J. Comput. Phys.*, 119(2), 295-324.
[3] Molls, T. and Molls, F. (1998): *J. Hydr. Engrg.*, 124(5), 501-508.
[4] 木村匡臣，島田正志，外川喜一郎，田中忠次（2009）：農業農村工学会論文集，77(5)，517-524.
[5] Vukovic, S. and Sopta, L. (2003): *SIAM J. Sci. Comput.*, 24(5), 1630-1649.