局所1次元開水路網における溶質輸送方程式に対するPetrov-Galerkin型有限要素法
A Petrov-Galerkin finite element method for the solute transport equation in locally one-dimensional open channel networks

○吉岡 秀和*・宇波 耕一*・河地 利彦**
Hidekazu Yoshioka, Koichi Unami and Toshihiko Kawachi

1. はじめに

地表流における物質輸送現象の多くは移流拡散型方程式(ADE)により記述される．一般に，ADEの求解には有限要素法(FEM)や有限体積法(FVM)といった数値計算手法が用いられる．とくに，主流方向に卓越した浅水流れにおける物質輸送現象を対象とする場合には，局所1次元開水路網を計算領域とし，分合流点で課される内部境界条件[1]を満足する数値計算手法が要求される．多くの数値計算手法では内部境界条件が陽的に課されており，空間方向の離散化が煩雑となりやすい[2]．ここでは，吉岡ら[3]が解析的に導出した局所1次元開水路網における溶質輸送方程式の数値計算に対するPetrov-Galerkin型FEM(PGFEM)を開発する．本PGFEMではHemker[4]にならい，要素内での未知量の補間関数に局所的な2点境界値問題の厳密解を用いることで風上化を取り入れた離散化を行う．また，内部境界条件を空間方向の離散化に陰的に組み込むことで効率的に数値解を算出する．以下ではまず，局所1次元開水路網における溶質輸送方程式について簡単に説明する．つぎに，溶質輸送方程式に対するPGFEMの定式化を示す．最後に，PGFEMにより樹木状開水路における溶質輸送の数値シミュレーションを行う．

2. 溶質輸送の支配方程式

溶質粒子の移動経路の連続性とMarkov性を仮定すると，局所1次元開水路網領域Ωにおける溶質輸送方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial (Vu)}{\partial x}-\frac{\partial^2 (Du)}{\partial x^2}+Ru=G \qquad (1)$$

で与えられる．ここに，tは時刻，xは位置座標，$u=AC$は保存量，Aは通水断面積，Cは溶質の断面平均濃度，Vは断面平均流速，$D>0$は分散係数，$R\geq 0$は減衰係数，Gは溶質の単位長さあたりの生成率である．なお，(1)からは複数種の反応性溶質の輸送を記述する放物型方程式が導出される[5]．

3. 有限要素定式化

3.1 弱形式

$u\in H^1$を仮定し，重み関数$w\in H^1$を(1)の両辺に乗じたうえで移流項と拡散項に部分積分を適用する．その結果，(1)は弱形式

$$\int_\Omega w\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}x-\int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x}F\mathrm{d}x+\int_\Omega wRu\mathrm{d}x-\int_\Omega wG\mathrm{d}x =-\left[wF\right]_\Gamma \qquad (2)$$

に帰着する．ここに，Γは領域Ωの境界であり，$F=Vu-\frac{\partial}{\partial x}(Du)$はフラックスである．

3.2 空間方向の離散化

まず，Ωを有限個の2節点要素で分割する．その際，各分合流点は必ずいずれかの節点と一致させる．(1)の各係数については，VおよびRは各要素内で一定値，DおよびGは節点での不連続を許容して各要素内で1次関数として与える．つぎに，各要素内での未知量uの補間には，風上化を取り入れた離散化を行うために局所的な2点境界値問題

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(V_{\mathrm{e}}\varphi_{i,\mathrm{e}}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(D_{\mathrm{e}}\varphi_{i,\mathrm{e}}\right)=0,\ i=1,2 \qquad (3)$$

$$\varphi_{1,\mathrm{e}}\left(x_{\mathrm{L,e}}\right)=1,\ \varphi_{1,\mathrm{e}}\left(x_{\mathrm{R,e}}\right)=0 \qquad (4)$$

$$\varphi_{2,\mathrm{e}}\left(x_{\mathrm{L,e}}\right)=0,\ \varphi_{2,\mathrm{e}}\left(x_{\mathrm{R,e}}\right)=1 \qquad (5)$$

の解$\varphi_{1,\mathrm{e}}$および$\varphi_{2,\mathrm{e}}$を用いる．ここに，eは対象とする要素の番号，$x_{\mathrm{L,e}}$および$x_{\mathrm{R,e}}$はe番目の要素両端でのxをあらわす．補間関数$\varphi_{1,\mathrm{e}}$および$\varphi_{2,\mathrm{e}}$は楕円型方程式に対する最大値原理を満足し，形状関数として機能する．最後に，各節点に対応した重み関数にはコンパクトな台を有する区分的1次関数[6]を用いる．

*京都大学大学院農学研究科，**京都大学大学院農学研究科名誉教授
キーワード：局所1次元開水路網，溶質輸送方程式，Petrov-Galerkin型有限要素法

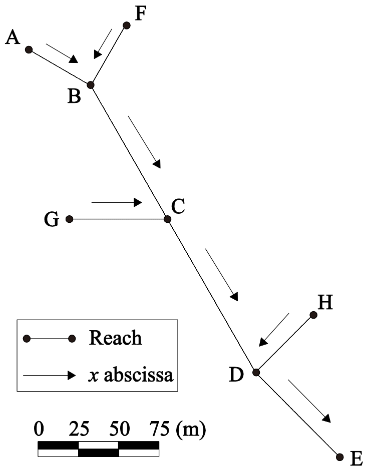

図1：開水路網の概略図 (Ramirez[7])

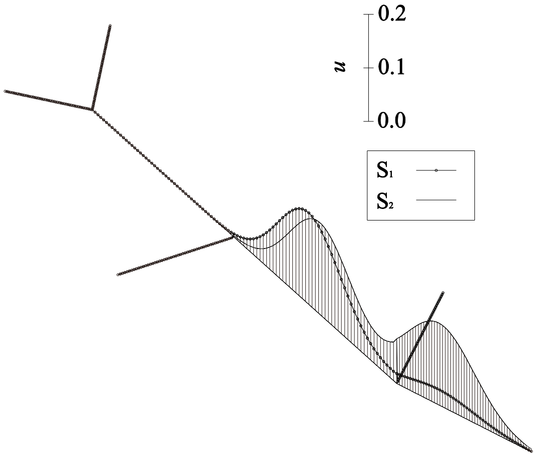

図2：水路網におけるuの分布($t = 200$ (s))

3.3 時間方向の離散化

弱形式(2)を空間方向に離散化して得られる常微分方程式の時間進行にはCrank-Nicolson法を適用する．本PGFEMは既往のFEMと同様に一定より小さい離散時間間隔に対し不安定となるため，質量行列に部分的な集中化を施す．常微分方程式の係数行列は疎行列であり，メモリ省力型のGauss-Seidel法により各時間における数値解を算出する．なお，本PGFEMは大域的保存性を有し，恒等的に$R = 0$となる定常問題に対しては無条件安定である．

4. 溶質輸送の数値シミュレーション

提案するPGFEMにより溶質輸送の数値シミュレーションを行う．本PGFEMの精度と保存性については，解析解が既知である問題に対する数値計算により十分な検証がなされている．ここでは，Ramirez[7]が移流分散現象の解析を行った樹木状の局所1次元開水路網(図1)を計算領域とする．4カ所の水路上流端A, F, G, Hより2種類の反応性溶質S_1とS_2が流入する場合を考える．S_1とS_2の支配方程式は$R > 0$とし

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial (Vu_1)}{\partial x} - \frac{\partial^2 (Du_1)}{\partial x^2} + Ru_1 = Ru_2 \tag{6}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial (Vu_2)}{\partial x} - \frac{\partial^2 (Du_2)}{\partial x^2} + Ru_2 = Ru_1 \tag{7}$$

で与える．添え字は溶質の種類と対応する．流れ場は定常で，(6)-(7)の係数は各Reach上で一定値として与える．各上流端では流入フラックスを指定し，下流端Eでは自由流出条件を課す．なお，各要素の局所Peclet数は全て2以上である．図2に，水路網における時刻$t = 200$ (s)での両溶質の保存量$u = AC$の分布を示す．本PGFEMによれば，両溶質が反応しながら水路網を流下する様子が良好に再現される．

5. おわりに

局所1次元開水路網における溶質輸送方程式に対する，内部境界条件を陰的に満足する効率的なPGFEMを開発した．本PGFEMの適用により，移流項が卓越する問題に対しても安定した数値解が得られた．今後は本PGFEMを実問題へ適用するとともに，理論的なアプローチによりその精度や収束性を明らかにする．

（引用文献）

[1] von Below J. (1988) Classical solvability of linear parabolic equations on networks. *Journal of Differential Equations*, 72:316-337. [2] Zhang Y., Aral M.M. (2004) Solute transport in open channel networks in unsteady flow regime. *Environmental Fluid Mechanics*, 4:225-247. [3] 吉岡秀和, 宇波耕一, 河地利彦 (2011) 1次元開水路網でのコルモゴロフ前進方程式の離散化に対応した有限体積法スキーム, 第19回日本雨水資源化システム学会講演要旨集, pp 135-138. [4] Hemker P.W. (1977) A numerical study of stiff two-point boundary problems, Amsterdam, pp 1-144. [5] Yoshioka H. (2012) Parabolic equation models for stochastic transport phenomena in surface water flows. Master thesis, Kyoto University, 57 pp. [6] 宇波耕一, 石田桂, 河地利彦 (2011) 1次元開水路の流れに対する保存型数値手法, 平成23年度農業農村工学会大会講演要旨集, pp 84-85.[7] Ramirez J.M. (in press) Population persistence under advection-diffusion in river networks. *Journal of Mathematical Biology*.