生態系モデルの定性微分方程式系による定式化
Formulation of ecosystem model based on qualitative differential equations

○工藤　庸介*・木全　卓*
Yosuke KUDO* and Takashi KIMATA*

1. はじめに　様々な自然現象の挙動を予測するために、対象を微分方程式によって記述することが多い。しかしながら、人間がある事象を理解する際に通常行う思考の過程においては、数値的な指標や計算式が用いられることは稀で、専ら対象となる系の挙動に対する常識的な因果関係に基づく推論が働いている。すなわち、定量的な情報が欠如している場合でも、人間は定性的な知識を基にして推論を行い、ある程度の結論を得ている。生き物を取り巻く環境にまつわる現象の多くは、その成り立ちを厳密に数値モデル化することが困難であり、またその構成要因の中には数量的な表現にそぐわないものも少なくない。したがって、このような対象系の挙動予測にあたっては、精緻な数値モデルに基づく観測値の精確な再現よりもむしろ、人間の思考過程を定式化した定性的なモデルを通して対象を簡潔かつ合理的に理解することも重要である。そこで本報では、地域環境の変動を定性的にモデリングするために、定性微分方程式系（system of Qualitative Differential Equations ; 以下 QDEs）の適用可能性を検討する。その目的のために、現時点で精緻な数値モデルが確立されつつある生態系モデルを取り上げる。

2. QDEs　QDEs は対象の定性的なモデリングのための代数的言語の一つである [1]。定量的に不完全な情報に基づいて推論を行うためには、数値のような定量値を用いるのではなく、“+”・“0”・“-”のような定性値を用いる必要がある。そこで通常の算術演算子に加えて、量の間の単調な関係を表すために Table 1 に示す制約を用いることができる [2]。QDEs を用いることによって、数値情報が不足していても対象系を構成する要因間の制約関係を表現することができるため、系全体の状態を把握してその挙動を予測することが可能になる。一方、“+”と“-”の和のように定性値が定まらない場合には、曖昧性が生じるという欠点もある。

Table 1　QDEs で用いることのできる制約
Constraints available in QDEs

【四則計算等】		
add $x\ y\ z$	:	各時点 t において、$x(t) + y(t) = z(t)$
mult $x\ y\ z$	:	各時点 t において、$x(t) \times y(t) = z(t)$
minus $x\ y$	:	各時点 t において、$x(t) = -y(t)$
sum-zero $a\ b \ldots z$	:	各時点 t において、$a(t) + b(t) + \ldots + z(t) = 0$
【微分】		
d/dt x dx	:	各時点 t において、$dx(t) = x'(t)$
【要素の関係を規定する制約：定性比例関係】		
M+ $x\ y$	:	x が増加すると y も増加する。
U+ $x\ y\ (a, b)$	:	$x < a$ のとき x が増加すると y は減少する $x = a$ のとき $y = b$ $x > a$ のとき x が増加すると y は増加する
S+ $x\ y\ (a, c)\ (b, d)$	:	$x < a$ のとき $y = c$ $x > b$ のとき $y = d$ その他の場合 $y = M^+ x$
abs-value $x\ y$	:	$\lvert x(t) \rvert = y(t)$
【対象の変化を規定する制約】		
constant x	:	どの時点においても x は一定
zero-std x	:	どの時点においても $x = 0$ で一定
positive-std x	:	どの時点においても $x > 0$ で一定
negative-std x	:	どの時点においても $x < 0$ で一定
non-constant x	:	どの時点においても $x' \neq 0$
increasing x	:	どの時点においても $x' > 0$
decreasing x	:	どの時点においても $x' < 0$
non-increasing x	:	どの時点においても $x' \leqq 0$
non-decreasing x	:	どの時点においても $x' \geqq 0$

*大阪府立大学大学院生命環境科学研究科：Graduate School of Life and Environmental Sciences, Osaka Pref. Univ.
キーワード：生態系モデル，定性推論，定性微分方程式系

3. 生態系モデルの定式化　ここでは、Fasham *et al.*[3)]のモデル（**Fig. 1**）を例にとって、その定性的な定式化を試みる。このモデルの状態変数は植物プランクトン（PHY）、動物プランクトン（ZOO）、バクテリア（BAC）、デトリタス（DET）、硝酸塩（NO_3）、アンモニウム塩（NH_4）、溶存有機態窒素（DON）の 7 つであり、モデルの制限栄養塩として窒素が用いられている[4)]。以下、この各変数間の定性的な関係を定式化する。

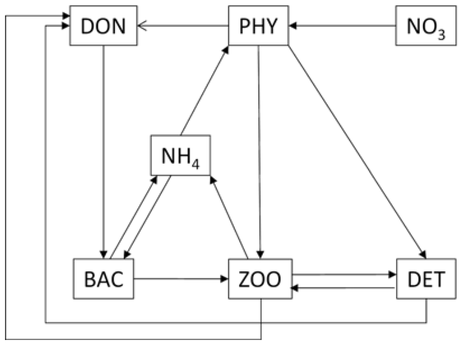

Fig. 1　生態系モデルの概要[4)]
Schematic diagram of ecosystem model

PHY は NO_3 と NH_4 の存在によって光合成を行って増加し、ZOO に捕食されるとともに一定の割合（μ_1）で枯死することでその現存量が時間変化する。

$$\mathrm{d\,PHY}/\mathrm{d}t = (\mathrm{M_0^+NO_3+M_0^+NH_4})\mathrm{PHY} - \mathrm{M_0^+}r_{\mathrm{ZOO}}\cdot r_{\mathrm{PHY}} - \mu_1\,\mathrm{PHY} \qquad (1)$$

ここで、$r_{\mathrm{ZOO}} = \mathrm{M_0^+\ ZOO}$、$r_{\mathrm{PHY}} = \mathrm{M_0^+\ PHY}$ である。

ZOO は、PHY、BAC、DET を捕食して増加し、一定の割合（μ_2）で死亡する。簡単のために、ZOO は全て分解されるものとした。

$$\mathrm{d\,ZOO}/\mathrm{d}t = (\mathrm{M_0^+PHY+M_0^+BAC+M_0^+DET})\mathrm{ZOO} - \mu_2\,\mathrm{ZOO} \qquad (2)$$

BAC は NH_4 と DON を取り込んで成長し、ZOO に捕食されるとともに一定の割合（μ_3）で死亡する。

$$\mathrm{d\,BAC}/\mathrm{d}t = (\mathrm{M_0^+NH_4+M_0^+DON})\mathrm{BAC} - \mathrm{M_0^+}r_{\mathrm{ZOO}}\cdot r_{\mathrm{BAC}} - \mu_3\,\mathrm{BAC} \qquad (3)$$

DET は ZOO に捕食される一方で、排糞によって増加する（ここでは結果として ZOO の増加が DET の増加をもたらすと集約した）。また、枯死した PHY は DET となる。さらに、一定の割合（μ_4）で DON に分解する。簡単のために、DET は沈降しないものとした。

$$\mathrm{d\,DET}/\mathrm{d}t = (\mathrm{M_0^+\ ZOO})\mathrm{DET} + \mu_1\,\mathrm{PHY} - \mu_4\,\mathrm{DET} \qquad (4)$$

NO_3 は PHY の光合成によってのみ除かれる。

$$\mathrm{d\,NO_3}/\mathrm{d}t = -\,\mathrm{M^+PHY} \qquad (5)$$

NH_4 は PHY と BAC に取り込まれると同時に、BAC と ZOO の死亡で排出される。

$$\mathrm{d\,NH_4}/\mathrm{d}t = -\,\mathrm{M^+PHY} - \mathrm{M^+\ BAC} + \mu_1\,\mathrm{PHY} + \mu_2\,\mathrm{ZOO} \qquad (6)$$

DON は PHY からの浸出と DET の分解によって増加し、BAC に取り込まれる。

$$\mathrm{d\,DON}/\mathrm{d}t = \mathrm{M^+PHY} + \mu_4\,\mathrm{DET} - \mathrm{M^+\ BAC} \qquad (7)$$

最後に、このモデルを閉鎖系と仮定すると、質量保存則は式(8)のようになる。

$$\mathrm{d\,PHY}/\mathrm{d}t + \mathrm{d\,ZOO}/\mathrm{d}t + \mathrm{d\,BAC}/\mathrm{d}t + \mathrm{d\,DET}/\mathrm{d}t + \mathrm{d\,NO_3}/\mathrm{d}t + \mathrm{d\,NH_4}/\mathrm{d}t + \mathrm{d\,DON}/\mathrm{d}t = 0 \qquad (8)$$

4. おわりに　本報では、Fasham *et al.*の生態系モデルを QDEs を用いて定性的に定式化することを試みた。このように連続量の上を時間変化する系の挙動を記号的に記述することによって、パラメータや関数形について完全な定量情報が与えられない場合でも挙動予測が可能になるものと期待できる。今後は効率的な定性シミュレーションのために、得られた QDEs を再検討するとともに、より洗練された制約の与え方を工夫する必要がある。

参考文献　1) 西田豊明：定性推論の諸相, 朝倉書店, 258p., 1993.　2) Farquhar, A., Kuipers, B., Rickel, J., Throop, D., and The Qualitative Reasoning Group　: QSIM: The Program and its Use, 183p., 1993.　3) Fasham, M.J.R., Ducklow, H.W., and McKelvie, S.M. : A nitrogen-based model of plankton dynamics in the oceanic mixed layer, *Journal of Marine Research*, **48**, pp.591-639, 1990.　4) 重光雅仁・山中康裕：生態系モデルを用いた海容における物質循環解析, 地球科学, **45**, pp.1-28, 2011.