

選択的集中化アルゴリズムに基づいた高効率浅水流モデル A highly efficient shallow water model based on a selective lumping algorithm

○吉岡 秀和^{1,2}・宇波耕一¹・藤原 正幸¹
○Hidekazu Yoshioka^{1,2}, Koichi Unami¹, Masayuki Fujihara¹

1. はじめに

河川や用・排水路に沿った水の流れは、1次元浅水流方程式(1-D SWEs)により合理的に記述される。1-D SWEs は非線型性を有し、ごく単純化された場合を除いて解析解の導出が困難である¹⁾。そのため、一般に1-D SWEs の求解には数値手法の適用がなされる。とくに、実用上は、常射流の混在、一般水路断面、分合流などを有する多様な流れに対応した、効率的かつ実装が容易な数値手法の開発が要求される。著者らはこれまで、有限要素法(FEM)と有限体積法(FVM)を併用した数値手法(FEVM)²⁾および双対格子に基づいた FVM(DFVM)³⁾を開発してきた。両手法は Riemann 解法や流束制限関数によらない、ごく単純な風上化手法に立脚する。両手法の大きな相違点は、FEVM では連続方程式の時間項に整合質量行列を、DFVM では集中化質量行列を用いる点である。その結果、FEVM では水際境界付近で解が不安定となりやすいが高い空間精度が実現される。一方で、DFVM では逆流を有する流れに対して不安定となるものの、水際境界付近における解の安定性が良好に保たれる⁴⁾。また、両手法ともに陽的な時間進行を行うが、FEVM は反復的な行列解法を伴うのに対し、DFVM は行列解法を要しない。本研究では、局所的な流れが射流であれば DFVM、それ以外では FEVM に準じた空間方向の離散化を行う、選択的集中化アルゴリズムに基づいて連続方程式を時間進行する数値手法(SELUM)を開発する。SELUM は FEVM の安定性と DFVM の効率性を兼備する。テスト問題への適用により、SELUM の実用性を示す。

2. 1次元浅水流方程式

局所 1次元開水路網の領域 Ω を考える。 Ω は有限個の水路とそれらを結合する分合流点からなる連結グラフとして与えられる。 Ω 上における1-D SWEs は、連続方程式

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q \quad (1)$$

ならびに運動方程式

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\beta Q^2}{A} \right) = -gA \frac{\partial \eta}{\partial x} - gAS_f \quad (2)$$

により構成される。ここに、 t は時刻、 x は各水路に

沿って定められた1次元座標、 A は通水断面積、 Q は流量、 q は水路単位長さあたりの横流入量、 η は水位、 β は運動量補正係数、 g は重力加速度、 S_f は摩擦勾配であり、Manning式により与えられる。連続方程式(1)については、弱形式の意味で理解する²⁾。

3. 選択的集中化アルゴリズム

SELUM では、連続方程式(1)に標準 Galerkin 法²⁾、運動方程式(2)に節点中心型 FVM³⁾を適用する。これにより、(1)と(2)は常微分方程式系

$$\mathbf{M} \frac{d\boldsymbol{\eta}}{dt} = \mathbf{a} \quad (3)$$

$$\mathbf{I} \frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{b} \quad (4)$$

に帰着される。 $\boldsymbol{\eta}$ は節点水位ベクトル、 \mathbf{Q} は要素流量ベクトル、 \mathbf{I} は単位行列、 \mathbf{M} は質量行列、 \mathbf{a} と \mathbf{b} は空間方向の離散化により得られたベクトルであり、陽的に評価される。SELUM では Guermond and Pasuquetti (2013)⁵⁾にならない、 \mathbf{M} の逆行列 \mathbf{N} とベクトル \mathbf{a} の積を

$$N_{i,j} a_j \approx \begin{cases} (m_{i,i})^{-1} \delta_{i,j} a_j & (\text{If } Fr_i > 1) \\ 2(m_{i,i})^{-1} a_i - M_{i,j} (m_{j,j})^{-2} a_j & (\text{Otherwise}) \end{cases} \quad (5)$$

と近似する。 \mathbf{m} は集中化された質量行列、 $\delta_{i,j}$ は Kronecker のデルタ、 Fr_i は第 i 番目の節点を共有する要素における Froude 数のうちの最小値である。(5)では総和規約が用いられている。提案する選択的集中化アルゴリズムにより、局所的な流れが射流であれば DFVM、それ以外では FEVM に準じた空間方向の離散化がなされるとともに、一切の行列解法を用いない陽的な時間進行が実現される。時間進行には4次精度 Runge-Kutta 法を適用する。時間間隔 Δt は CFL 条件を満足するよう設定する。SELUM の計算速度は DFVM とほぼ同様であり、FEVM の2倍程度となることが確認されている。

4. テスト問題

4.1 三角形水路に生じるダム崩壊問題

非矩形断面水路では水面幅が水位に依存し、矩形断面水路の場合と比較して数値計算が不安定となる。ここでは、長さ2,000(m)の摩擦のない水平な直線水路でのダム崩壊問題を考え

¹ 京都大学大学院農学研究科、² 日本学術振興会特別研究員 DC

キーワード：1次元浅水流方程式、質量行列、選択的集中化アルゴリズム

る。水路断面は勾配 1:1 の三角形とする。水路中央部にはダムが存在するものとし、ダム上流側水深を 10 m、下流側水深を 0 m とする。格子間隔は 1 m、時間間隔は 0.004 s とする。FEVM では計算初期に水深が負値となる。図 1 に示すように、DFVM および SELUM では水深の非負性が実現される。水際境界の遅れは、吉岡ら (2013)⁶⁾ の提案する簡易的なフラックス評価手法により改善が可能である。

4.2 射流を遡上する段波

矩形水路において等流状態にある射流の下流端を急閉塞して生じる遡上段波¹⁾を考える。水路の幅は 0.600 m、長さは 20 m、底勾配は 0.01 m/m、Manning 係数は 0.01 s/m^{1/3} である。格子間隔 0.01 m、時間間隔 0.005 s、初期条件を水深 0.026 m の等流とし、初期時刻に水路下流端を急閉塞する。DFVM では計算初期に水路下流端付近で水深が負値となる。図 2 に示すように、SELUM と FEVM は実測値を良好に再現する。

4.3 多重連結型開水路網に生じるダム崩壊問題

仮想的な多重連結型開水路網に生じるダム崩壊問題を考える。こうした流れは実際の決壊洪水により生じうる⁶⁾。ここでは、図 3 に示す長さ 10 m、勾配 0.01 m/m の 6 本の直線水路からなる開水路網を対象とする。水路断面は A-H で幅 5 m の矩形、それ以外で底辺 1 m、勾配 1:1 の台形とする。Manning 係数は B-C-D で 0.04 s/m^{1/3}、その他で 0.03 s/m^{1/3} とする。境界 A と E は壁境界とする。水路網の下流端標高を 0 m とする。格子間隔 0.05 m、時間間隔 0.0005 s とし、初期条件は A-H で水位 1 m、その他で水深 0 m とする。図 3 は水面形の数值計算結果を示す。SELUM は DFVM と同様に、屈曲点や下流端部より生じる遡上段波を含む複雑な流れを合理的に再現する。これら以外にも不規則断面を含む潮汐⁷⁾、各種ダム崩壊問題^{8),9)} に SELUM の適用がなされ、良好な数值解が得られている。

5. おわりに

SELUM は FEVM と DFVM の利点を兼備し、多様な浅水流れを効率的に再現する。また、本研究で用いた選択的集中化アルゴリズムの適用範囲は広く、2-D SWEs やその他の双曲型問題、放物型問題に対しても実装可能である。

引用文献

- 1) Delestre O., Lucas C., Ksinant P.A., Darboux F., Laguerre C., Vo T.N.T., James F., Cordier S. (in press) SWASHES: a compilation of shallow water analytic solutions for hydraulic and environmental studies, *Int. J. Numer. Methods Fluids*.
- 2) Unami K., Alam A.H.M.B. (2012) Concurrent use of finite element and finite volume methods for shallow water equations in locally 1-D channel networks. *Int. J. Numer. Methods Fluids* **69**(2), 255-272.
- 3) 吉岡秀和, 宇波耕一 (2012) 局所 1 次元開水路網流れ解

- 析のための双対格子に基づいた有限体積法スキーム. 第 69 回農業農村工学会京都支部研究発表会講演要集, 114-115. 4) 吉岡秀和, 宇波耕一, 藤原正幸 (2012) 1 次元浅水流方程式の数値モデルにおける時間項の離散化手法, 平成 24 年度農業農村工学会応用水理研究部会講演集, 96-100. 5) Guermond J.L. and Pasquetti R. (2013) A correction technique for the dispersive effects of mass lumping for transport problems. *J. Methods Appl. Mech. Engng.* **253**(1), 186-198. 6) 吉岡秀和, 宇波耕一, 藤原正幸 (2013) 一般断面を有する多重連結型開水路網に生じるダム崩壊問題に対する双対格子に基づいた有限体積モデル, 第 62 回理論応用力学講演会講演論文集, 2 pp. 7) Vázquez-Cendón M.L. (1999) Improved treatment of source terms in upwind schemes for the shallow water equations in channels with irregular geometry. *J. Comput. Phys.* **148**(2), 11-34. 8) Alcrudo F. and Fázaro S. (1999) Conclusions of the 1st CADAM Meeting -Wallingford, UK, *Proceedings of the CADAM Meeting Wallingford*, 35-43. 9) Kocaman S. and Ozmen-Cagatay H. (2012) The effect of lateral channel contraction on dam break flows: Laboratory experiment, *J. Hydrol.* **432-433**, 145-153.

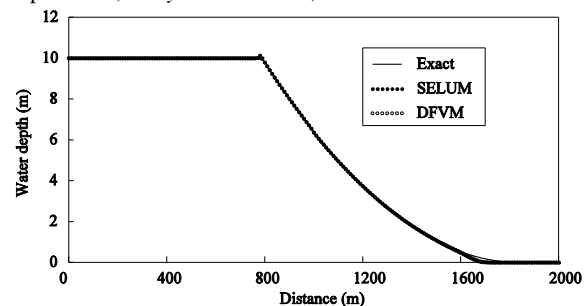


図 1 三角形水路に生じるダム崩壊問題の数值計算結果(時刻 $t = 30$ s).

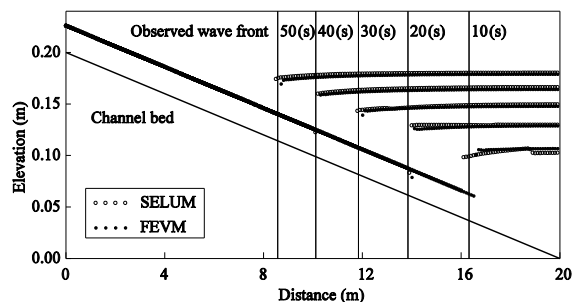


図 2 射流を遡上する段波の数值計算結果.

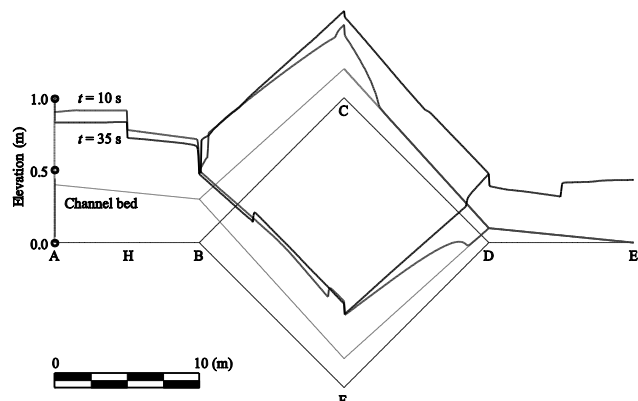


図 3 多重連結型水路網に生じるダム崩壊問題の数值計算結果.