

ランジュバン方程式を用いた水文過程のモデル化
Modelling Hydrological Processes Using the Langevin Equation

○宇波耕一*・A.H.M. バディウル アラム*・藤原正幸*
Koichi Unami, Abul Hasan Md Badiul Alam, and Masayuki Fujihara

1. はじめに

干天が連続した後の降雨のように、確率論的に生起、継続する水文事象を含む水文過程に関し、ランジュバン方程式を用いたモデル化が試みられてきている。ランジュバン方程式は極めて単純な確率微分方程式であるため、モデルパラメータの推定が容易である[1]。また、確率制御問題を設定することにより、現実的な意思決定問題へ応用することが可能である[2]。ここでは、ある有界領域からの確率過程の初脱出時刻を水文事象の生起時刻としてとらえ、観測された時系列データからモデルパラメータを推定する方法を示す。その方法により、バングラデシュ国の雨季に観測された土壌の飽和事象について、実際のモデルパラメータ推定を行う。

2. ランジュバン方程式

ランジュバン方程式は、

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dB_t \quad (1)$$

の形で表される確率微分方程式である。ここに、 t は時間、 $\alpha(>0)$ は減衰係数、 $\sigma(>0)$ は拡散係数、 B_t は標準1次元ブラウン運動であり、支配される確率過程 X_t はゼロ回帰型となる。 K をある定数パラメータとし、対象とする水文事象は $|X_t| < K$ である間は生起せず $|X_t| \geq K$ である間は継続するものとする。以下では、時間方向に適宜スケールを施したものと仮定して、 $\alpha=1$ とする。

3. モデルパラメータの推定方法

水文事象の生起、継続を含む水文過程の時系列データから、モデルパラメータ σ および K を統計学的に推定する方法について検討する。

自然数 $i = 0, 1, 2, \dots$ に対し、 $t = T_i$ に生起して D_i の間だけ継続する第 i 番目の水文事象が観測されているものとする。すなわち、確率過程 X_t は、 $t = T_i$ に領域 $(-K, K)$ の境界へ領域内から到達し、 $t = T_i + D_i$ にその境界を離れる。

確率過程 X_t の平均 $E[X_t]$ と分散 $\text{Var}[X_t]$ に関し、

$$E[X_t] = \exp(-t) X_0 \quad (2)$$

ならびに

$$\text{Var}[X_t] = \frac{\sigma^2}{2}(1 - \exp(-2t)) \quad (3)$$

であることが知られているので、 $t = T_i + D_i$ については

$$E[X_{T_i + D_i}] = \pm \exp(-D_i) K \quad (4)$$

ならびに

$$\text{Var}[X_{T_i + D_i}] = \frac{\sigma^2}{2}(1 - \exp(-2D_i)) \quad (5)$$

となる。 $X_{T_i} = K$ である場合の概念図を図1に示す。よって、

$$E\left[\left((1 - \exp(-D_i))K\right)^2\right] = \frac{\sigma^2}{2}(1 - \exp(-2D_i)) \quad (6)$$

が得られ、モデルパラメータ σ および K は

$$\frac{\sigma^2}{K^2} = E\left[\frac{2(1 - \exp(-D_i))^2}{1 - \exp(-2D_i)}\right] \quad (7)$$

のように関連付けられる。(7)の右辺は観測データから推定できる。

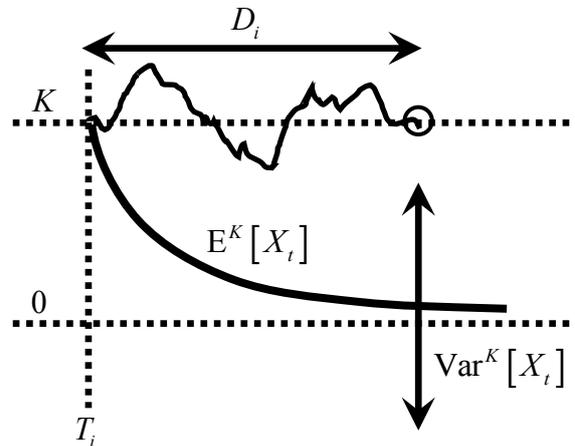


図1: 水文事象における確率過程

Figure 1: Stochastic process in a hydrological event

一方、ディンキンの公式[3]を用いれば、領域 $(-K, K)$ からの初脱出時刻 τ について

$$E[\tau] = \frac{2}{\sigma^2}(\varphi(\pm K) - \varphi(X_0)) \quad (8)$$

*京都大学農学研究科, Graduate School of Agriculture, Kyoto University

キーワード: ランジュバン方程式, 水文過程, 初脱出時刻

であることがわかる．ここに，関数 $\varphi(x)$ は

$$\varphi(x) = \int \exp\left(\frac{y^2}{\sigma^2}\right) \left(\int \exp\left(-\frac{y^2}{\sigma^2}\right) dy \right) dy \quad (9)$$

で与えられる偶関数である．初脱出時刻 τ の期待値も，観測データから

$$\begin{aligned} E[\tau] &\approx \frac{1}{\sum (T_i - T_{i-1})} \sum \int_{T_{i-1}}^{T_i} \tau dt \\ &= \frac{1}{T_N - T_0} \sum \frac{(T_i - T_{i-1})^2}{2} \end{aligned} \quad (10)$$

によって推定できる．

以上より，観測データから推定された期待値を(7)および(8)に代入して解けば，モデルパラメータ σ および K の値が得られることになる．

4. 土壌の飽和事象に対する適用例

南アジアモンスーン気候下にあるバングラデシュ国ジャマルプル県に位置する農地(24 56 16 N 089 55 53 E)において，地表より15cmの深さにDecagon社製EC-5センサーを設置し，2012年2月19日～2013年2月16日の期間，10分間隔で体積含水率を計測してロガーに記録した．その結果，図2に示すように，6月から10月の雨季の間，間断的に31回の土壌の飽和事象が生じていた．飽和事象の生起時刻 T_i および継続時間 D_i (day) を表1に示す．これらの観測データに対し，前節のモデルパラメータ推定方法を適用したところ， $\sigma=1.4702$ ， $K=2.1727$ となった．

5. おわりに

適用例に示した飽和事象は，10分で完了するものから数日におよぶものを含み，生起時刻の間隔も不規則である．このような水文過程をわずかなモデルパラメータを用いて記述できる点で，ランジュバン方程式は極めて有用である．

引用文献

[1] Alam AHMB, Ryo M, Unami K, Fujihara M (2012) An autonomous runoff model using stochastic differential equations, 平成24年度農業農村工学会応用水理研究部会講演集, 112-113.

[2] Ryo M, Unami K, Fujihara M (2012) Stochastic control of micro rainwater harvesting systems, 平成24年度農業農村工学会応用水理研究部会講演集, 114-115.

[3] Øksendal B (2007) Stochastic Differential Equations –An Introduction with Applications–, 6th Edition, Springer-Verlag, 124-126.

表1: 観測された土壌の飽和事象

Table 1: Observed saturation events of soil

i	T_i	D_i
0	2012/6/17 12:50	0.1528
1	2012/6/22 19:50	0.0972
2	2012/6/25 6:40	0.2500
3	2012/6/30 18:00	0.0833
4	2012/7/10 9:00	0.1597
5	2012/7/10 13:50	0.3681
6	2012/7/13 2:10	0.4375
7	2012/7/13 21:20	0.0069
8	2012/7/13 23:20	0.5069
9	2012/7/14 16:30	0.4861
10	2012/7/15 7:20	0.1528
11	2012/7/15 16:50	0.0208
12	2012/7/15 22:40	0.3958
13	2012/7/16 11:00	2.1181
14	2012/7/20 2:50	0.3472
15	2012/7/24 2:50	0.5139
16	2012/8/4 19:50	0.5069
17	2012/8/4 20:10	0.0069
18	2012/8/13 4:50	0.1319
19	2012/8/14 14:10	0.4097
20	2012/8/19 14:40	0.2500
21	2012/8/20 7:00	0.5556
22	2012/8/20 16:10	0.1597
23	2012/8/24 19:20	2.9375
24	2012/9/14 14:40	0.1875
25	2012/9/15 20:30	0.7847
26	2012/9/30 9:20	2.6181
27	2012/9/30 9:50	0.0069
28	2012/10/4 1:20	0.3611
29	2012/10/9 1:20	1.2986
30	2012/10/9 1:50	0.0139

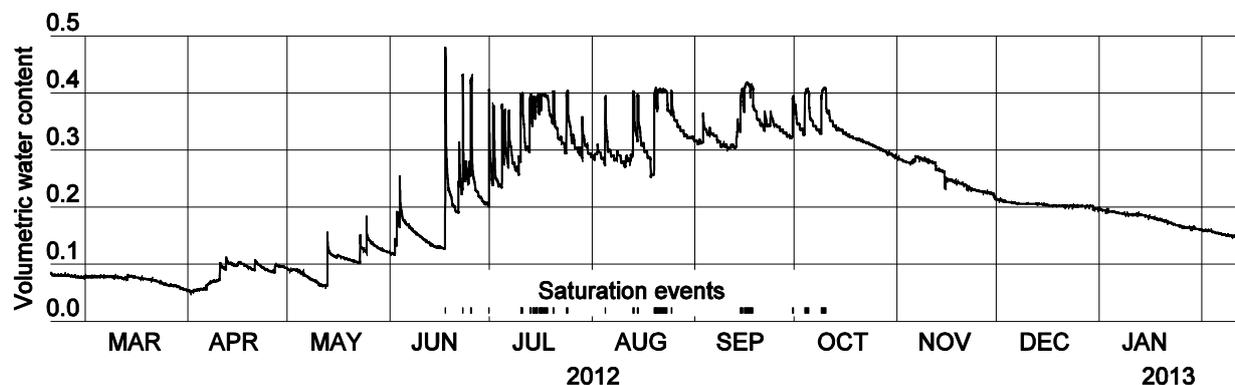


図2: 体積含水率と飽和事象の時系列データ

Figure 2: Time series data of volumetric water content and saturation events