貯水池運用ルールを支配するHJB方程式に対する計算手法
Computational Method for HJB Equations Governing Reservoir Operation Rules

○宇波耕一*・エルファネ シャリフィ*・藤原正幸*
Koichi Unami, Erfaneh Sharifi, Masayuki Fujihara

１．はじめに

灌漑用ダム，溜池，ファームポンドのような農業用貯水池については，各時期における水収支の不確実性を考慮した運用ルールを策定しておくことが望ましい．通常は，連続干天により貯水位が低下した場合に取水制限を行うべき閾値を規定するルールカーブが定められる[1]．近年では，貯水位以外に得られる情報を加味して，より高度な制御を行う貯水池運用ルールも提案されている[2,3]．

連続干天が長期にわたる地域において，消費水量が決定論的であるような場合には，灌漑期間全体にわたって貯水池への流入が一切無い最悪状態を基準とすれば極めて安全な貯水池運用が可能となる．しかしながら，確率論的に生起，継続する降水事象によって連続干天が灌漑期間中に終了することを期待する場合には，合理的に定められたよりタイトな貯水池運用ルールを導入するべきである．ここでは，降水事象の発生に関して規準化されたランジュバン方程式を用いたモデルを用い，最適制御を記述するHamilton-Jacobi-Bellman(HJB)方程式を数値的に解いてルールカーブを得る手法について検討する．ランジュバン方程式にもとづくモデル化手法については，乾燥地の雨季に対する応用を考慮し，前報[4]のものを改良する．貯水池運用ルールの最適化問題を定式化するための評価関数においても，半乾燥地の乾季を対象とした場合[5]から変更し，灌漑量の目標値を決定論的に設定する．

２．貯水池運用モデル

貯水池の貯留量水位曲線は得られているものとする．有効貯留量を$V_{\max}$とする．連続干天期間中，時刻tにおける貯留量X_tを支配する水収支式は，

$$\mathrm{d}X_t = -u\mathrm{d}t \tag{1}$$

である．ここに，uは貯水池からの流出流量であり，灌漑のための取水量Qならびに浸透と蒸発による損失量Lの和である．損失量Lは，制御することはできないものの，決定論的に知ることができると仮定する．規準化されたランジュバン方程式は，

$$\mathrm{d}Y_t = -Y_t\mathrm{d}t + \sqrt{2}\mathrm{d}B_t \tag{2}$$

で表される確率微分方程式である．B_tは標準1次元ブラウン運動であり，支配される確率過程Y_tはゼロ回帰型となる．Kをある正の定数パラメータとし，$|Y_t| < K$である間は干天期間が継続し，$|Y_t| \geq K$とである間は降水事象が発生しているものとする．さらに，いまひとつの定数パラメータK_τ ($> K$)を定め，$|Y_t| \geq K$である期間中に$|Y_t| = K_\tau$が達成されれば貯水池へ十分に水が補給されて水位低下が解消するものとする．

貯水池からの流出流量uは，現時刻におけるX_tとY_tの情報をフィードバックして定められる制御変数とする．Y_tが確率過程であるので，それによって決まるuおよびX_tも確率過程である．

灌漑量の目標値をQ^*とする．灌漑期間$(0,T)$においてQをできるだけQ^*に一致させ，かつ，貯水池が空になる時刻をできるだけ遅らせることを目標として，最適制御問題を設定する．すなわち，最大化すべき評価関数$J^u(s,x,y)$を

$$J^u(s,x,y) = \mathrm{E}^{s,x,y}\left[\int_s^{\hat{T}} f(t,X_t,Y_t,u(t))\mathrm{d}t + g(\hat{T},X_{\hat{T}},Y_{\hat{T}})\right] \tag{3}$$

とする．ここに，$\mathrm{E}^{s,x,y}$は時刻$t=s$に$X_s = x$かつ$Y_s = y$であった場合の期待値を表し，$\hat{T}$は領域$\Omega = (0,V_{\max})\times(-K_\tau,K_\tau)$からの初脱出時刻($\leq T$)であり，関数$f$と$g$は

$$f(t,x,y,u) = f(u) = -\varepsilon|u - L - Q^*|, \tag{4}$$

$$g(T,x,y) = 0, \tag{5}$$

$$g(s,x,\pm K_\tau) = 0, \tag{6}$$

$$g(s,0,y) = -\int_s^T Q^*\mathrm{d}t = -(T-s)Q^*, \tag{7}$$

$$g(s,V_{\max},y) = 0 \tag{8}$$

*京都大学大学院農学研究科，Graduate School of Agriculture, Kyoto University
キーワード：貯水池運用ルール，確率過程，HJB方程式

と与える．ここに，εはトレードオフ関係にある2つの制御目標のいずれを重視するかを定める重みである．

最適な貯水池運用ルールは，評価関数(3)を最大化する最適制御$u = u^*$である．ただし，u^*は許容集合$U = \left(L, u_{\max}\right)$に制約されるものとする．最大化された評価関数の値

$$\Phi = J^{u^*}\left(s,x,y\right) = \sup_{u\in U} J^{u}\left(s,x,y\right) \tag{9}$$

および最適制御u^*は，HJB方程式

$$\begin{aligned}&\Phi_s - u^*\Phi_x - y\Phi_y + \Phi_{yy} + f\left(s,x,y,u^*\right)\\&= \sup_{u\in U}\left\{\Phi_s - u\Phi_x - y\Phi_y + \Phi_{yy} + f\left(s,x,y,u\right)\right\}\\&= 0\end{aligned} \tag{10}$$

および終端条件と境界条件

$$\Phi = g\left(s,x,y\right) \tag{11}$$

に支配される．

３．HJB方程式に対する計算手法

HJB方程式(10)および終端条件と境界条件(11)は，有限要素法と有限階差法を組み合わせて離散化し，数値計算を行う．領域Ωは，x方向とy方向のそれぞれについて等間隔ΔxとΔyの構造格子に分割する．最適制御u^*は，各長方形格子内で(10)の最大化条件を満たすように定めていくが，その際に必要となるx方向偏導関数は

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} \approx \frac{\Phi_{i+1,k} + \Phi_{i+1,k+1} - \Phi_{i,k} - \Phi_{i,k+1}}{2\Delta x} \tag{12}$$

と近似して求める．ここに，$\Phi_{i,k}$は格子点$\left(x,y\right) = \left(x_i, y_k\right) = \left(i\Delta x, -K_\tau + k\Delta y\right)$における$\Phi$の値である．空間方向の離散化は，$x$方向については1次精度の風上有限階差法を，$y$方向については[6]に準じた風上有限要素法を適用して行う．ただし，風上有限要素法における重みw_kは

$$w_k = \begin{cases}\left(\dfrac{y - y_{k-1}}{\Delta y}\right)^{\exp\left(-\frac{y^l\Delta y}{2}\right)} & \left(y_{k-1} < y \le y_k\right)\\ \left(\dfrac{y_{k+1} - y}{\Delta y}\right)^{\exp\left(\frac{y^r\Delta y}{2}\right)} & \left(y_k < y \le y_{k+1}\right)\\ 0 & (\text{Otherwise})\end{cases} \tag{13}$$

である．ここに，$y^l = \left(y_{k-1} + y_k\right)/2$，$y^r = \left(y_k + y_{k+1}\right)/2$である．時間$s$方向については，潅漑期間終了時刻$T$から出発して逆向きに，完全陰形式有限階差法を適用する．以上により，各時間ステップにおいて連立一次方程式系が得られるので，Gauss-Seidel法によって求解する．

４．計算手法の検証

計算手法を検証するため，$V_{\max}$ = 4,000 m^3，T =120 days，L = 9.6 m^3/day，$u_{\max}$ = 720 m^3/day，K = 3.197，K_τ = 3.429として貯水池運用ルールを導出する．これは，平均的には30日に1度の1時間継続する洪水を導入する，乾燥地の雨水ハーベストシステムを想定している．

まず，$Q^* = V_{\max}/T - L$ = 23.7 m^3/dayの場合，すなわち，自明な最適制御

$$x \ge V_{\max} - \left(Q^* + L\right)t \quad\Rightarrow\quad u^* = Q^* + L \tag{14}$$

が存在する場合について$\varepsilon = 10^{-8}$として計算を行う．空間格子間隔を様々に変化させると，Δyの影響は少ない一方，$\Delta x > V_{\max}/1000$の場合には(14)が満たされないことがわかる．よって以下では，$\Delta x = V_{\max}/1000$，$\Delta y = K_\tau/50$とする．

つぎに，同じQ^*に対し，εを0.1と1.0にした場合についてもそれぞれ計算する．計算結果はy方向についてはいずれもほぼ一定となり，ルールカーブ，すなわち取水を行うべき閾値x_θを，各時刻において定めることができる．εが0と∞の場合にはルールカーブ$x_\theta = L\left(T - t\right)$と$x_\theta = 0$がそれぞれ自明であるが，$\varepsilon$が$10^{-8}$，0.1，1.0の場合に計算によって得られるルールカーブはこれらと良好に整合するものとなる．

さらに，より大きなQ^*を設定して計算を行うことにより，連続干天が潅漑期間中に確率論的に終了することを期待する場合のルールカーブを得ることができる．

５．おわりに

最適な貯水池運用ルールを規定するHJB方程式に対し，計算手法を提示して検証を行った．得られたルールカーブにもとづいて，貯水池運用の実証試験を行っていく予定である．

引用文献

[1] Senga Y, 1991. A reservoir operational rule for irrigation in Japan. *Irrigation and Drainage Systems* 5 (2), 129-140.

[2] Moghaddasi M, Araghinejad S, Morid S, 2013. Water management of irrigation dams considering climate variation: case study of Zayandeh-rud Reservoir, Iran. *Water Resources Management* 27 (6), 1651-1660.

[3] Eum HI, Vasan A, Simonovic SP, 2012. Integrated reservoir management systems for flood risk assessment under climate change. *Water Resources Management* 26, 3785-3802.

[4] 宇波・アラム・藤原，2013. ランジュバン方程式を用いた水文過程のモデル化, 平成25年度農業農村工学会大会講演会講演要旨集, [4-16].

[5] Unami K, Yangyuoru M, Alam AHMB, Kranjac-Berisavljevic G, 2013. Stochastic control of a micro-dam irrigation scheme for dry season farming. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment* 27 (1), 77-89.

[6] Unami K, Abagale FK, Yangyuoru M, Alam AHMB, Kranjac-Berisavljevic G, 2010. A Stochastic differential equation model for assessing drought and flood risks. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment* 24 (5), 725-733.