一次元半無限領域における放物型偏微分方程式に対する計算手法
Computational Methods for Parabolic Partial Differential Equations in One-Dimensional Semi-Infinite Domains

○宇波耕一[*]・エルファネ シャリフィ[*]・藤原正幸[*]
Koichi Unami, Erfaneh Sharifi, Masayuki Fujihara

1．はじめに

ゼロ回帰型の確率微分方程式である一次元ランジュバン方程式を用いた水文過程のモデル化に関し，これまでにいくつかの提案を行ってきている[1-4]．さらに，水需要のダイナミクスを確率過程として捉える[7]とは異なった状況下において，一次元ランジュバン方程式を貯水池運用における最適意思決定問題に対して応用することも試みてきている[5,6]．しかしこれまでは，渇水レベルを表す指標として確率変数の絶対値を用いており，渇水を現す領域が連結となっていなかった．確率変数の値そのものを渇水レベルとして取り扱えばこの問題は解決されるが，さまざまな応用において現れるコルモゴロフ後退方程式のような放物型偏微分方程式の領域が半無限領域となり，数値計算の実際においては困難が生じる．台が半無限領域となるような基底関数を用いた有限要素法を用いることも考えられるが[1]，ここでは，変数変換によって半無限領域を有界な領域に移す手法を提示する．その結果得られる放物型偏微分方程式に対して標準的ガレルキン法ならびに風上化手法を適用し，数値解を求める．さらに，モンテカルロ法による直接計算の結果とも比較する．

2．渇水レベルの確率過程モデル

ゼロ回帰型の確率過程 X_t を支配するランジュバン方程式は，

$$\mathrm{d}X_t = -rX_t\mathrm{d}t + \sqrt{2D}\mathrm{d}B_t \tag{1}$$

で表される．ここに，t は時間，r は定数の回帰係数，$D\,(>0)$ は定数の拡散係数，B_t は標準1次元ブラウン運動である．確率過程 X_t を渇水レベルのモデルとしてとらえ，K をある定数パラメータとし， $X_t < K$ である間は十分湿潤な状態が継続し，$X_t \geq K$ である間は渇水が発生しているものとする．湿潤状態を表す領域 $\Omega^x = (-\infty, K)$ は半無限領域であるが，変換

$$y = \exp\left(x/\sqrt{D}\right) \tag{2}$$

によって $\Omega^y = \left(0, \exp\left(K/\sqrt{D}\right)\right)$ に移る．また，全領域 $(-\infty,\infty)$ は $(0,\infty)$ に移る．さらに，伊藤の公式により(1)は

$$\mathrm{d}Y_t = \left(1 - r\log Y_t\right)Y_t\mathrm{d}t + \sqrt{2}Y_t\mathrm{d}B_t \tag{3}$$

となる．確率微分方程式(3)に対するコルモゴロフ後退方程式は

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \left(1 - r\log y\right)y\frac{\partial p}{\partial y} + y^2\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0 \tag{4}$$

となる．ここに， $p = p(t, y, \tau, \zeta)$ は，$Y_t = y$ であった場合に $(0,\infty)$ の部分領域 G に対して $Y_\tau \in G$ となる遷移確率 $P(t, y, \tau, G)$ を生成する確率密度関数である．

渇水リスクの評価や水資源管理戦略の導出においては，初期渇水レベル X_t に対して将来の時刻 τ まで十分湿潤な状態が継続する確率を計算することが重要である．この確率を $u = u\left(t, \exp\left(x/\sqrt{D}\right)\right) = u(t, y)$ とする．積分演算の線型性より， u は領域 Ω^y において(4)と同一の放物型偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(1 - r\log y\right)y\frac{\partial u}{\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{5}$$

を満たすことがわかる．終端条件

$$u(\tau, y) = 1 \tag{6}$$

および境界条件

$$u\left(t, \exp\left(K/\sqrt{D}\right)\right) = 0 \tag{7}$$

は u の定義より自明である．さらに，確率密度関数の諸性質および $\lim_{y\to 0}\left(y\log y\right) = 0$ であることにより，いまひとつの境界条件

$$u(t, 0) = 0 \tag{8}$$

が得られる．

3．計算手法の概要

放物型偏微分方程式の終端値境界値問題(5)～(8)に対しては，変換後の y 空間方向に有限要素法を，逆向き時間方向に完全陰形式有限階差法

---

[*]京都大学大学院農学研究科，Graduate School of Agriculture, Kyoto University
キーワード：確率過程，放物型偏微分方程式，有限要素法

を適用する．各時間ステップにおいて得られる連立一次方程式系は，ガウスーザイデル法によって求解する．領域Ω^yは等間隔Δyの要素に分割する．有限要素法にもとづく離散化手法としては，標準的ガレルキン法，ならびに，前報[6]に準じた風上化手法を用い，比較する．ただし，風上化手法で用いる重みを定めるための局所ペクレ数Peは，ここでは

$$Pe = \frac{y - ry\log y}{y^2}\Delta y = \frac{1 - r\log y}{y}\Delta y \qquad (9)$$

となる．この局所ペクレ数Peについては，$y = 0$付近，また，Δyを小さくしていった場合の挙動について検討する必要があるが，評価は各要素中央において行うこと，ならびに，Peの発散時には一次精度風上差分法となるような重みを用いているため，とくに問題は生じない．

さらに，元のランジュバン方程式(1)を離散化し，$\mathrm{d}B_t$を擬似乱数で近似するモンテカルロ法によって$u\left(t, \exp\left(x/\sqrt{D}\right)\right)$を直接計算する．

４．計算結果

標準的な問題として，$r = 1$，$D = 1$，$K = 1$の場合を考え，放物型偏微分方程式の終端値境界値問題を$t = \tau = 0$から$t = -10$まで数値的に解く．領域$\Omega^y = (0, e)$は200等分し，$\Delta y = e/200$とする．よって，第i節点$y = ei/200$は領域Ω^xの$1 + \log(i/200)$に対応する．時間間隔は1/8640とする．モンテカルロ法においても同じ時間間隔を用い，初期時刻$t = -10$において$1 + \log(i/200)$あった1000の粒子のうち時刻$t = 0$に領域Ω^x内部に留まっているものの数をカウントして$u(0, ei/200)$を計算する．計算を実行した結果，おおむね$i > 10$については各計算手法の間で大きな違いはなかったが，終端値境界値の不連続点である$t = 0$かつ$y = 0$付近では**図１**に示すような違いが見られた．また，厳密解において満たされるべき最大値原理は，風上化手法では満たされていたが，標準的ガレルキン法では満たされていなかった．風上化手法による数値解の鳥瞰図を**図２**に示す．

５．おわりに

放物型偏微分方程式の数値計算における基本的な問題について確認した．確率制御問題において現れるHJB方程式も放物型偏微分方程式であるが，その求解にあたってモンテカルロ法は原理的に利用できないので，計算手法を慎重に検討していく必要がある．

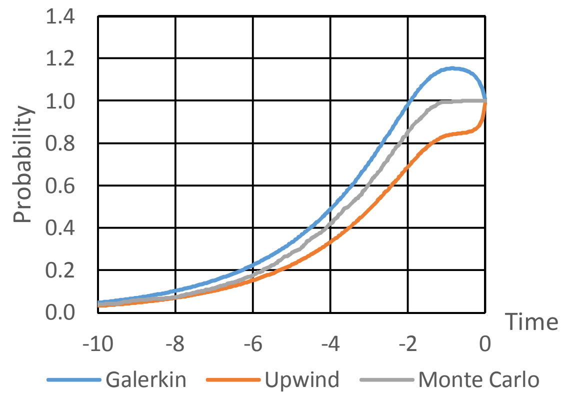

図１　様々な計算手法を用いて得られる数値解
Fig. 1　Numerical solutions using different computational methods

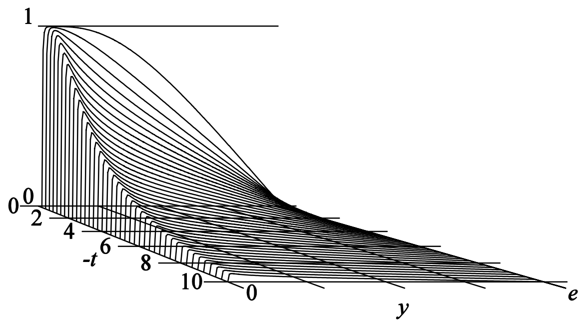

図２　風上化手法による計算結果の鳥瞰図
Fig. 2　Bird's-eye view of the computational result using the upwind method

引用文献

[1] Sharifi E, Unami K, Fujihara M, 2014. Modelling alternation of dry and wet spells using the Langevin equation. *The 2nd International Conference on Vulnerability and Risk Analysis and Management*, 1994-2001.

[2] Sharifi E, Unami K, Fujihara M, 2014. Formulation of a stochastic control problem to verify optimality of rainfed agriculture. *Proceedings of the 22nd Annual Congress of JRCSA*, 139-141.

[3] Sharifi E, Unami K, Fujihara M, 2014. Optimality of rainfed agriculture in the sense of stochastic control, *Proceedings of Annual Symposium*, *Applied Hydraulics Division*, *JSIDRE*, 45-46.

[4] 宇波・アラム・藤原，2013．ランジュバン方程式を用いた水文過程のモデル化，平成25年度農業農村工学会大会講演会講演要旨集，[4-16].

[5] Unami K, Mohawesh O, Sharifi E, Takeuchi J, Fujihara M, 2015. Stochastic modelling and control of rainwater harvesting systems for irrigation during dry spells, *Journal of Cleaner Production*, 88, 185-195.

[6] 宇波・シャリフィ・藤原，2014．貯水池運用ルールを支配するHJB方程式に対する計算手法，平成26年度農業農村工学会大会講演会講演要旨集，[3-34].

[7] Unami K, Yangyuoru M, Alam AHMB, Kranjac-Berisavljevic G, 2013. Stochastic control of a micro-dam irrigation scheme for dry season farming. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment* 27 (1), 77-89.