流れのある地下水における密度流の古典解析
Classical Analysis of Density-Driven Groundwater Flow

○竹内 潤一郎*・川畑 誠*・藤原 正幸*
TAKEUCHI Junichiro, KAWABATA Makoto, and FUJIHARA Masayuki

1. はじめに

地下水は，農業や工業，生活用水といった水資源として利用されるだけでなく，湧水の水源として動植物の生息環境を支える基盤となっている．また，近年では，地上と地下の温度差を利用するヒートポンプが実用化されてきており，地下環境の把握は重要な課題となっている．

流れのある地下水において，流速やレイリー数に応じて密度流の様式が変化することが知られている[1,2]．ここでは，比較的小さなレイリー数で生じる密度流に着目し，フーリエ級数を用いた古典解析を行う．

2. 解析

2-1 支配方程式

均一で等方性を有する帯水層における温度による密度差を考慮した水の流れと熱輸送に関する支配方程式を無次元化したものは以下のように表される．ここでは，水と帯水層の非圧縮性を仮定し，ブシネスク近似を採用している．

$$\nabla^2 \Psi = -Ra \frac{\partial \theta}{\partial x} \tag{1}$$

$$\nabla^2 \theta - \boldsymbol{v} \cdot \nabla \theta = \frac{\partial \theta}{\partial t} \tag{2}$$

ここで，Ψ は流れ関数，θ は温度，$\boldsymbol{v}$ は流速ベクトルで $\boldsymbol{v} = (\partial \Psi / \partial z, -\partial \Psi / \partial x)^{\mathrm{T}}$ である．(x, z) は鉛直 2 次元座標系で，$x \in (0, l)$ は水平方向，$z \in (0,1)$ は鉛直上向きを正とする．t は時間であり，以上の変数は無次元化されている．Ra はレイリー数で，$\nabla = (\partial / \partial x, \partial / \partial z)^{\mathrm{T}}$ は微分演算子である．また，境界条件は**図 1**（外側）のように与えられる．

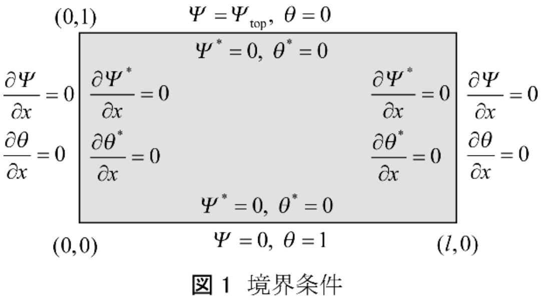

図 1 境界条件
Fig. 1 Boundary Conditions

2-2 フーリエ級数を用いた解析

ここでは，Holzbecher (1998)[3] と同様の解析手法を採用する．熱対流を生じないときの安定な解 Ψ^{S}，θ^{S} を基準とし，それらとの摂動分 Ψ^*，θ^* を考える．安定解と摂動はそれぞれ以下のように表される．

$$\Psi^{\mathrm{S}} = \Psi_{\mathrm{top}} z, \quad \theta^{\mathrm{S}} = 1 - z \tag{3}$$

$$\Psi^* = \Psi - \Psi^{\mathrm{S}}, \quad \theta^* = \theta - \theta^{\mathrm{S}} \tag{4}$$

また，摂動の境界条件は**図 1**（内側）のようになる．

十分時間が経過したとき，x 軸方向に速度 V で移動する進行波になると仮定すると，

$$\Psi^*(t, x, z) = \Psi^{\mathrm{W}}(x - Vt, z) \tag{5}$$

$$\theta^*(t, x, z) = \theta^{\mathrm{W}}(x - Vt, z) \tag{6}$$

とおける．ここで，移動座標系 $(X, z) = (x - Vt, z)$ を導入し，式(3)から(6)を式(1)，(2)に代入して整理すると以下のようになる．

$$\frac{\partial^2 \Psi^{\mathrm{W}}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi^{\mathrm{W}}}{\partial z^2} = -Ra \frac{\partial \theta^{\mathrm{W}}}{\partial X} \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 \theta^{\mathrm{W}}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta^{\mathrm{W}}}{\partial z^2} + \left(V - \Psi_{\mathrm{top}}\right) \frac{\partial \theta^{\mathrm{W}}}{\partial X} - \frac{\partial \Psi^{\mathrm{W}}}{\partial X} = 0 \tag{8}$$

ここでは 2 次の変動項は無視できるとしている．また，この進行波の境界条件は，上端または下端においては式(9)，左右両サイドにおいては式(10)のようになる．

$$\Psi^{\mathrm{W}}(X, z) = \theta^{\mathrm{W}}(X, z) = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial \Psi^{\mathrm{W}}}{\partial X} = \frac{\partial \theta^{\mathrm{W}}}{\partial X} = 0 \tag{10}$$

*京都大学大学院農学研究科 Graduate School of Agriculture, Kyoto University
キーワード： 地下水，密度流，フーリエ級数

これらの境界条件に適合する関数として，以下の式を用いて，

$$\Psi^{\mathrm{W}}(X,z)=\Psi_{r,s}\cos\left(\frac{r\pi}{L}X\right)\sin\left(s\pi z\right) \tag{11}$$

$$\theta^{\mathrm{W}}(X,z)=\theta_{r,s}\cos\left(\frac{r\pi}{L}X\right)\sin\left(s\pi z\right) \tag{12}$$

と表すことができると仮定する．ここで，$\Psi_{r,s}$，$\theta_{r,s}$ は r と s（いずれも正の整数）で定められる波の振幅，L は水平方向の基本波の波長の 1/2 に相当する．鉛直方向の基本波の波長は 2（対象領域の厚さの 2 倍）としている．正確には各波長の合成（一次結合）で表すべきだが，ここでは簡易的にこのように表す．式(11), (12)を式(7), (8)に代入して整理すると，以下の式が得られる．

$$\left\{\Psi_{r,s}^2\alpha^2+\theta_{r,s}^2Ra^2\left(\frac{r\pi}{L}\right)^2\right\}\sin\left(\frac{r\pi}{L}X\right)\sin\left(s\pi z\right)=0 \tag{13}$$

$$\left\{\left(\Psi_{r,s}-\theta_{r,s}\left(V-\Psi_{\mathrm{top}}\right)\right)^2\left(\frac{r\pi}{L}\right)^2+\theta_{r,s}^2\alpha^2\right\}$$

$$\times\sin\left(\frac{r\pi}{L}X\right)\sin\left(s\pi z\right)=0 \tag{14}$$

ここで，

$$\alpha=\left(\frac{r\pi}{L}\right)^2+\left(s\pi\right)^2 \tag{15}$$

である．これらが，任意の X，z で成り立つには，それぞれの式の中括弧内が 0 となることが必要である．これらの式を整理して，行列の形でかくと以下のようになる．

$$\begin{pmatrix}\alpha & -iRa\dfrac{r\pi}{L}\\ \dfrac{r\pi}{L} & \left(\Psi_{\mathrm{top}}-V\right)\dfrac{r\pi}{L}-i\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Psi_{r,s}\\ \theta_{r,s}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \tag{16}$$

自明な解 $\Psi_{r,s}=\theta_{r,s}=0$ 以外の解が存在するのは式(16)の行列の逆行列が存在しないときである．すなわち，行列式が

$$\left(\Psi_{\mathrm{top}}-V\right)\frac{r\pi}{L}\alpha-i\left(\alpha^2-Ra\left(\frac{r\pi}{L}\right)^2\right)=0 \tag{17}$$

のときであり，$r\pi/L$，$\alpha>0$ であることから，

$$V=\Psi_{\mathrm{top}} \tag{18}$$

$$\left(\left(\frac{r\pi}{L}\right)^2+\left(s\pi\right)^2\right)^2-Ra\left(\frac{r\pi}{L}\right)^2=0 \tag{19}$$

となる．式(19)に関して，$(r\pi/L)^2$ について解くと以下のようになる．

$$\left(\frac{r\pi}{L}\right)^2=\left(Ra-2\left(s\pi\right)^2\right)\pm\sqrt{Ra\left(Ra-4\left(s\pi\right)^2\right)} \tag{20}$$

ここで，$\left(Ra-2\left(s\pi\right)^2\right)>\sqrt{Ra\left(Ra-4\left(s\pi\right)^2\right)}$ であり，また，$Ra\geq 0$ であることから，r が正の値となるには，

$$Ra\geq 4\left(s\pi\right)^2 \tag{21}$$

となることが必要である．様々な正の整数 s において，不等式(21)が成り立つには，$s=1$ のときに満たしている必要があり，すなわち，

$$Ra\geq 4\pi^2 \tag{22}$$

となる．

3. まとめ

今回，移動座標系において摂動分（式(7), (8)）に，安定解以外の定常解が存在する条件，つまり，元の支配方程式(1), (2)において進行波解となる条件として，2 つの式(18), (22)が得られた．ひとつめの条件は，移動座標系の速度として，地下水流速をとることを意味しており，これは進行波は地下水流速で移動することを示している．

ふたつめの関係式は，Holzbecher (1998)が示したベナール対流（静止地下水における熱対流）が起こる条件と同じものとなっており，この条件は，熱対流の発生は地下水流速に依存しないことを示している．しかし，数値実験の結果[1]からは， 熱対流が起こる最小のレイリー数（限界レイリー数）は，流速とともに増加することが示されており，今回得られた条件は必要条件であることが示唆される．

今後は，安定解析を行い，分岐現象について検討を進める．

参考文献

[1] Takeuchi, Kawabata, and Fujihara, 2015, Proceedings 1st int. conf. SEE, 550-556. [2] Kawabata, Takeuchi, and Fujihara, 2015 , Jurnal Teknologi, 76:15 , 7-12 . [3] Holzbecher, 1998, Modeling Density-Driven Flow in Porous Media, Springer, Chap. 5.