雨水ハーベスティングシステムの運用に対する動的計画法の応用
Application of Dynamic Programming to Operation of Rainwater Harvesting Systems

○藤倉大和*・宇波耕一*・藤原正幸*
Yamato Fujikura, Koichi Unami, Masayuki Fujihara

1．はじめに

雨水ハーベスティングとは，トイレの洗浄や灌漑などのさまざまな目的に利用するため，雨水を貯留することである[1),2)]．貯水槽は雨水ハーベスティングシステムにおいて欠かせない構成部分であるが，近年，その運用方法を根拠づける数理的基礎が注目されている[3)].

本研究では，決定論的な雨水ハーベストによる貯留量への補給がある場合について，貯水槽からの最適取水戦略を考える．この際に，動的計画法を用いる．評価関数の最小化を目的とする動的計画法においては，非線型偏微分方程式の1つであるHJB方程式が基礎式となる．このHJB方程式を求解する際に，粘性解の概念を導入する．そして，HJB方程式の粘性解を1つ推測した上で，その解が一意解であることを比較定理を用いて示す.

2．貯水槽からの最適取水問題

有限の期間$[0,T)$における，最大貯留量Vの貯水槽からの最適取水戦略について考察する．いま，単位時間あたりの流入量をΔQと仮定する．このとき，貯留量x，時刻τ，取水量u，流入量ΔQについて，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = -u + \Delta Q \tag{1}$$

が成立する．取水量uを変数とする評価関数J^uは，現在時刻をtとして，

$$J^u = J^u(t,x) = \int_t^T |u-q|\,\mathrm{d}\tau \tag{2}$$

とする．ただし，qは$V=(q-\Delta Q)T$が成り立つように設定された目標取水量である．評価関数$J^u(t,x)$は，将来における実際の取水量uと目標値qの偏差の累計を表す．評価関数$J^u(t,x)$の下限値を$\Phi(t,x)$とすると，$\Phi(t,x)$は,

$$\Phi(t,x) = J^{u^*}(t,x) \le J^u(t,x) \tag{3}$$

と表される．u^*は最適取水量である．$\Phi(t,x)$は価値関数と呼ばれる.

3．HJB方程式と粘性解

動的計画法の最小値原理より，$\Omega=[0,T)\times(0,V)$において$\Phi(t,x)$および$u^*=u^*(t,x)$はHJB方程式

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial t} + (u^*-\Delta Q)\frac{\partial\Phi}{\partial x} - |u^*-q| = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \sup_{u\in U}\left\{(u-\Delta Q)\frac{\partial\Phi}{\partial x} - |u-q|\right\} = 0 \tag{4}$$

に支配される[4)]．uの許容集合Uは，取水量uの最小値を$q_{\min}$，最大値を$q_{\max}$とすると，

$$U = [q_{\min}, q_{\max}] \tag{5}$$

である．ただし，$\Delta Q \le q_{\min}$とする．また，終端条件は

$$\Phi(T,x) = 0\,, \tag{6}$$

境界条件は

*京都大学大学院農学研究科，Graduate School of Agriculture, Kyoto University
キーワード：雨水ハーベスト，HJB方程式，粘性解

$$\Phi(t,0)=(q-\Delta Q)(T-t) \tag{7}$$

となる．HJB方程式(4)を，上限値を実際に計算して

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial t}+H\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)=0 \tag{8}$$

と表す．ここに，実数 p の関数 $H(p)$ はハミルトニアンと呼ばれ，具体的には，

$$H(p)=\begin{cases}(q_{\min}-\Delta Q)p-(q-q_{\min}) & \text{if } p\le -1\\ (q-\Delta Q)p & \text{if } -1<p<1\\ (q_{\max}-\Delta Q)p-(q_{\max}-q) & \text{if } 1\le p\end{cases} \tag{9}$$

となる．このハミルトニアン(9)は，p に関して単調増加，下向きに凸，かつ，リプシッツ連続な関数である．また，$p=\pm1$ の場合を除いて連続微分可能である．

$x=(q-\Delta Q)(T-t)$ で表される直線を L と定める．$\Omega\backslash L$ において，HJB方程式(8)および終端条件(6)と境界条件(7)を満たし，Ω 上で連続な関数 Φ として

$$\Phi=\begin{cases}0 & \text{if } x\ge(q-\Delta Q)(T-t)\\ -x+(q-\Delta Q)(T-t) & \text{if } x<(q-\Delta Q)(T-t)\end{cases} \tag{10}$$

が見つかる．便宜上，この解を推測解と呼ぶ．この推測解から導かれる最適取水量 u^* は

$$\begin{cases}u^*=q & \text{if } x\ge(q-\Delta Q)(T-t)\\ q_{\min}\le u^*\le q & \text{if } x<(q-\Delta Q)(T-t)\end{cases} \tag{11}$$

となる．ところが，推測解(10)の Φ は L 上では微分可能ではないので，古典的な意味では Ω 全体における(8)の解ではない．動的計画法におけるHJB方程式などの退化楕円型偏微分方程式に対しては，連続な弱解として粘性解の概念が導入される．実際，推測解(10)はHJB方程式(8)の粘性解である．これは，粘性劣解であり，かつ，粘性優解であるという，粘性解の定義にもとづいて，容易に示すことができる．粘性解(8)の一意性は，$\bar{\Omega}$ 上で連続な粘性劣解 v_1 と粘性優解 v_2 について

$$\sup_{\bar{\Omega}}(v_1-v_2)=\sup_{\Gamma}(v_1-v_2) \tag{12}$$

が成り立つという比較定理から導かれる．ここに，

$$\Gamma=(\{t=T\}\cap\{0\le x\le V\})\cup(\{0\le t\le T\}\cap\{x=0\}) \tag{13}$$

である．これは，特別に設定されたある補助関数が Γ 上で最大値をとることから証明できる．その際，前述のハミルトニアン(9)に関する諸性質を用いる．

4．おわりに

動的計画法の枠組みで，貯水槽における取水についての最適制御戦略を検討した．今回，単位時間あたりの流入量が一定であるモデルを考えた．このモデルでは，貯留量が不足している場合の最適取水量は，任意だが目標取水量以下でなければならないということがわかった．また，HJB方程式の粘性解となる価値関数の一意存在性を示した．一意性の証明には比較定理を用いた．

引用文献

1) Pachpute, J.S., Tumbo, S.D., Sally H. and Mul, M.L. (2009): Sustainability of Rainwater Harvesting Systems in Rural Catchment of Sub-Saharan Africa. *Water Resour. Manage.*, **23**, 2815–2839.
2) Devkota, J., Schlachter, H. and Apul, D. (2015): Life cycle based evaluation of harvested rainwater use in toilets and for irrigation. *J. Clean. Prod.*, **95**, 311–321.
3) Sharifi, E., Unami, K., Yoshioka, H. and Fujihara, M. (2015): The viscosity solution solving a primitive optimal control problem for an irrigation tank. *Proceedings of the 23rd Annual Congress of JRCSA*, 51–52.
4) Fleming, W.H. and Soner, H.M. (2006): *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*, Springer Science+Business Media, pp. 67–72.