

個体群管理のためのインパルス制御モデルにおける閾値の感度解析

Sensitivity analysis on the thresholds derived from an impulse control model for population management

○八重樫優太^{*,**}・吉岡秀和^{***}・宇波耕一^{*}・藤原正幸^{*}

Yuta Yaegashi, Hidekazu Yoshioka, Koichi Unami, Masayuki Fujihara

1. はじめに

近年、我が国では魚食性鳥類による内水面水産資源の食害が深刻化の一途を辿っている。その代表的な例が、水鳥カワウによるアユの食害である [1]。地方自治体や漁業協同組合は、食害を減少させるために様々な対策を行なっているが、「いつ、どの程度対策を行なうべきか」を決定する手法は確立されておらず、現場では経験的な判断に基づく対策がなされている [2]。こうした現状を受け、著者らは数理モデルに基づいた接近手法が効果的であると考え、確率制御、とくにインパルス制御に立脚した個体群管理戦略を検討してきた [3,4]。本稿は、このインパルス制御モデルの紹介、ならびに、モデルにおいて「いつ、どの程度対策を行なうべきか」を決定する2つの閾値に対する感度解析を目的とする。

2. インパルス制御モデル

インパルス制御モデルをYaegashi et al. [4]に基づき紹介する。ひとつの生息地を対象として、無限期間にわたる魚食性鳥類の個体群管理を考える。個体群の管理者、すなわち意思決定者は、対策を行なうことで個体群を減少させることができると仮定する。個体群の駆除に際しては、駆除数に比例する費用（銃弾費）に加えて、駆除数の多寡に関わらず固定費用（人件費）が発生すると仮定する。時刻 t における個体群の規模を X_t とする。 X_t の時間発展は、伊藤型の確率微分方程式 [5] に基づく

$$\begin{cases} dX_t = X_t (\mu dt + \sigma dB_t), & \tau_i \leq t < \tau_{i+1} < \infty, \\ X_{\tau_i} = X_{\tau_i-} - \zeta_i, & t = \tau_i \end{cases}, \quad X_{0-} > 0 \quad (1)$$

によって記述されるとする。ここで、 $\mu > (\sigma^2 / 2)$ は個体群の成長率、 $\sigma > 0$ は個体群に対する確率論的な擾乱の大きさをあらわすパラメータ、 B_t は1次元標準Brown運動 [5]、 τ_i は駆除が行なわれる時点、 $\zeta_i > 0$

はその時点での駆除数である。各回の駆除にかかる費用を $K(\zeta_i) = k_1 \zeta_i + k_0$ とあらわす。ここで、 k_0 は固

定費用、 k_1 は比例費用である。意思決定者が得る期待総割引現在価値（正味の利益）を

$$J(x; \eta) = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-\delta s} (RX_s^M - rX_s^m) ds - \sum_{i=1}^\infty e^{-\delta \tau_i} K(\zeta_i) \chi_{\tau_i} \right] \quad (2)$$

とあらわす。ここで、 δ は割引率、 RX_s^M は個体群が存在することによる便益、 rX_s^m は個体群が存在することによる不便益をあらわす。以降では δ は十分大きいものとする。 η は $\eta = \{(\tau_i, \zeta_i)\}_{i \geq 0}$ のように定義さ

れる駆除政策で、許容集合 $\mathcal{A}$ を満たす制御であるとする。駆除を行なう意思決定者の目的は(2)のもとで

$$V(x) = \sup_{\eta \in \mathcal{A}} J(x; \eta) = J(x; \eta^*) \quad (3)$$

*京都大学大学院農学研究科, Graduate School of Agriculture, Kyoto University

**日本学術振興会特別研究員 DC, Research Fellow of Japan Society for the Promotion of Science (DC)

***島根大学生物資源科学部, Faculty of Life and Environmental Science, Shimane University

キーワード：食害、個体群管理、インパルス制御

を達成する駆除方針 η ，すなわち最適駆除方針 η^* を見つけることである．この最適化問題に対する最適性の条件は，以下の準変分不等式

$$\max \{ \mathcal{L}V(x) + Rx^M - rx^m, \mathcal{M}V(x) - V(x) \} = 0 \text{ for } x > 0, \quad V(0) = 0 \quad (4)$$

として記述される．ここで， $\mathcal{L}$ と $\mathcal{M}$ は十分に滑らかな関数である $W(x)$ に対して

$$\mathcal{L}W(x) = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 W'' + \mu x W' - \delta W, \quad \mathcal{M}W(x) = \sup_{\zeta} [-K(\zeta) + W(x - \zeta)] \quad (5)$$

と定義される作用素である．最適駆除方針は，制御が発動される個体数の水準 $\bar{x}$ ，ならびに駆除により減少した後の個体数 $\underline{x}$ を用いて，以下に示す駆除規則として記述できる [6]：

- 1) 個体数が区間 $[0, \bar{x}]$ 内にある限り，駆除を行わない．
- 2) 個体数が $x \in [\bar{x}, \infty)$ にある場合，即座に $x - \underline{x}$ だけの駆除を行い，個体数を $\underline{x}$ へと減少させる．

3. 解析解

準変分不等式(4)の厳密な粘性解は，閾値 $\underline{x}$ と $\bar{x}$ を用いて

$$V(x) = \begin{cases} ax^\beta + A_1 x^M + A_2 x^m & (x < \bar{x}) \\ -k_1(x - \underline{x}) - k_0 + a\underline{x}^\beta + A_1 \underline{x}^M + A_2 \underline{x}^m & (x \geq \bar{x}) \end{cases} \quad (6)$$

とあらわされる．ここで， β ， A_1 ， A_2 はパラメータにより決定される係数であり， a ， $\underline{x}$ ， $\bar{x}$ はある非線型連立方程式の一意的な解として得られる [4]．

4. 閾値の感度解析

2つの閾値 $\bar{x}$ と $\underline{x}$ のパラメータに対する依存性を数値的に検証する．パラメータを微小に変化させ，Yaegashi et al. [4]による数値計算手法により閾値を求める．用いるパラメータ値は $\mu = 1.7 \times 10^{-1}$ (1/year)， $\sigma = 5.3 \times 10^{-1}$ (1/year^{1/2})， $m = 2.0$ (-)， $M = 0.5$ (-)， $\delta = 1.0 \times 10^0$ (1/year)， $r = 5.0 \times 10^{-4}$ (-)， $R = 1.0 \times 10^{-1}$ (-)， $k_0 = 1.0 \times 10^1$ (-)， $k_1 = 1.0 \times 10^0$ (-) [3, 4]である．得られた感度解析の結果は

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial \mu} < 0, \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial \sigma} > 0, \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial \delta} > 0, \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial r} < 0, \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial R} > 0, \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial m} < 0, \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial M} > 0, \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial k_0} > 0, \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial k_1} > 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial \mu} < 0, \quad \frac{\partial \underline{x}}{\partial \sigma} > 0, \quad \frac{\partial \underline{x}}{\partial \delta} > 0, \quad \frac{\partial \underline{x}}{\partial r} < 0, \quad \frac{\partial \underline{x}}{\partial R} > 0, \quad \frac{\partial \underline{x}}{\partial m} < 0, \quad \frac{\partial \underline{x}}{\partial M} > 0, \quad \frac{\partial \underline{x}}{\partial k_0} < 0, \quad \frac{\partial \underline{x}}{\partial k_1} > 0 \quad (8)$$

である．個体群の規模が増加する方向にパラメータが変化する場合（ μ 増加， σ 減少），閾値はともに減少する．意思決定者がより持続的に管理を行う場合（ δ 増加），閾値はともに増加する．個体群がもたらす利益が増加する場合（ R ， M 増加， r ， m 減少），閾値はともに増加する．比例費用が増加する場合（ k_1 増加），閾値はともに増加する．特に， $k_0 \rightarrow 0$ としたとき，すなわち固定費用が0に近づくとき2つの閾値 $\bar{x}$ と $\underline{x}$ は近づくようである．これらの結果は，個体群管理を行ううえで有益な情報である．

5. おわりに

今後は，より一般的な準変分不等式を求解可能な数値計算手法の開発，ならびに，カワウ個体群管理への応用を行っていく予定である．

引用文献

- [1] Kameda, K.: Population increase of the Great Cormorant *Phalacrocorax carbo* and measures to reduce its damage to the fisheries and forests of Lake Biwa, In *Lake Biwa: Interactions between Nature and People*, Springer, pp.491-496, 2012. [2] 山本: カワウってどんな鳥, 全国内水面漁業協同組合連合会, p.28, 2009. [3] Yaegashi et al.: Impulse and singular stochastic control approaches for management of fish-eating bird population, *International Conference on Optimization and Decision Science 2018*. (under review) [4] Yaegashi et al.: Numerical computation of the coefficients in an exact solution to an impulse control model for optimal population management, *Proceedings of Computational Engineering Conference JSCES*, 23, 2018. (submitted) [5] Øksendal, B: *Stochastic differential equations*, Springer, 2003. [6] 辻村, 大西: 幾何ブラウン運動の最適インパルス制御について, *RIMS講究録*, 1194, pp.225-232, 2001.