

有限要素法による Navier-Stokes 流と飽和／不飽和浸透流の同時解析 Coupled Simulation of Navier-Stokes and Seepage Flows in Saturated/Unsaturated Domain

○嶋田侑治* 藤澤和謙* 村上 章*

SHIMADA Yuji, FUJISAWA Kazunori and MURAKAMI Akira

1. はじめに

フィルダムやため池といった利水構造物において、漏水は頻発する問題であるにも関わらず、その原因や経路を特定することは、現在でも非常に困難な状況にある。また、パイピングの経路が分かたなかった場合であっても、浸透水は飽和／不飽和領域に加え、パイピングホール内の流体領域を通過するため、多孔質領域と流体領域の異なる領域にまたがる流れを解析することが、漏水量の予測には必要となる。現在、著者らは Darcy-Brinkman 式により、Navier-Stokes 流と飽和浸透流を同時に解析する方法を開発している。本論では、Darcy-Brinkman 式を不飽和領域に拡張し、飽和領域だけでなく、不飽和領域も有する浸透流と流体領域の二つの流れを同時に解析できる方法とその結果を示す。

2. 支配方程式

Darcy-Brinkman 式は、Navier-Stokes 式を多孔質領域において空間平均をとることで導出され、飽和領域対象とする。同様の平均操作を不飽和領域において行うことで、不飽和領域も対象とする Darcy-Brinkman 式は以下の形をとる (藤澤ら, 2019)。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{u_i u_j}{\theta} \right) + \frac{\theta}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\theta g}{k} u_i = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

ここに、 u_i は流速 (多孔質領域では Darcy 流速)、 p は圧力、 g は重力加速度、 ρ は密度、 θ は体積含水率、 k は飽和・不飽和透水係数である。式(1)は、 $\theta = 1.0, k = \infty (1/k = 0)$ の時、Navier-Stokes 式に一致する。そのため、Darcy-Brinkman 式は Navier-Stokes 式を包括し、浸透流と Navier-Stokes 流の同時解析を可能にする。

3. FEM シミュレーション

式(1), (2)の数値解析には、SUPG 法を適用した FEM を利用した。その結果の妥当性を検証するため、Tracy (2006) によって提案された Richards 式の厳密解との比較を行った。通常、不飽和浸透流の質量保存則を記述する Richards 式に厳密解は存在しないが、Tracy (2006) は水分特性曲線モデルの関数形を工夫することで、同式を線形化し、厳密解を得た。図 1 には、定常状態における Tracy (2006) の厳密解と数値解の比較を示す。Darcy-Brinkman 式は慣性項を含むため、定常状態においてのみ、厳密解との

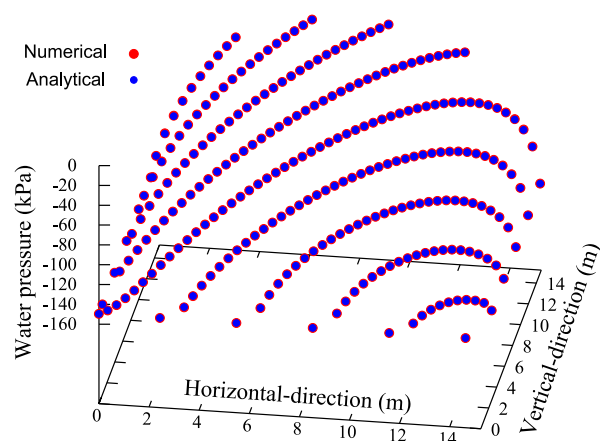


図 1 Tracy(2006)の理論解と数値解の比較
Fig. 1 Comparison between analytical solution by Tracy (2006) and numerical computation

*京都大学大学院農学研究科 Graduate School of Agriculture, Kyoto University 浸透流, 数値解析

正確な比較が可能である。計算では1700秒後には定常状態に達し、図1は1800秒後の水圧の理論値と計算値をプロットしたものである。各点の値が一致していることが見てとれ、平均相対誤差は $1.26 \times 10^{-1} \%$ となった。この結果は、数値解が十分な精度をもって計算されることを示した。

4. 水みちをもつ多孔質領域の浸透流

図2に解析領域と境界条件を示す。長方形の多孔質領域下部に流体領域を設定した。初期には、底面から0.2mのところから自由水面（地下水位）があると仮定し、左側の水位を0.3mまで上昇させることで浸透流を発生させた。そのため自由水面より上部の領域では、部分的に不飽和状態から飽和状態へと遷移する領域が現れる計算となる。境界条件としては、左右の境界において水圧を指定した箇所以外では、ノンスリップ条件を課した。なお、計算には透水係数 k 及び体積含水率 θ を間隙水圧の関数としてモデル化する必要があり、van Genuchten modelを採用した。

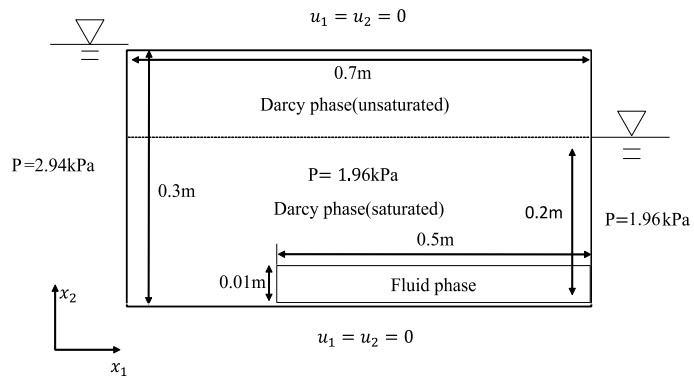


図2 計算領域と境界条件

Fig. 2 Computational domain and boundary conditions

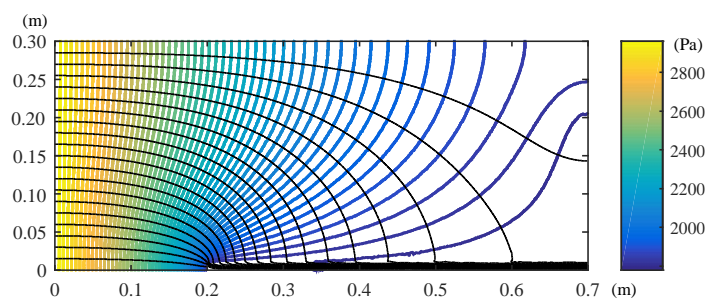


図3 ピエゾ圧の分布と流線

Fig.3 Computed piezometric pressure and stream lines

数値計算では、1.0秒を経過すると、流速や水圧の変化が小さくなり、10.0秒には定常状態に達した。図3には、ピエゾ圧のコンターラインと併せて、流線を黒線で示す。流線は左側から水みちの流体領域に集まっており、左側から浸入した水は流体領域に集中しながら流れる様子が見てとれる。計算結果から水みち内の流速を調べたところ、左側から水平方向に0.2mに位置する入口から右側の出口に向かって徐々に流速及び流量が増加した。これは、流体領域の上面にある多孔質領域から浸透流が流入することに起因した。この結果は、多孔質領域と流体領域の流速が質量保存を保ちながら首尾よく計算されたことを示す。

5. おわりに

Darcy-Brinkman式を不飽和領域にまで拡張した支配方程式を用いて、多孔質領域の飽和／不飽和浸透流と流体領域の流れの同時計算に取り組んだ。不飽和浸透流の計算結果を、Tracy(2006)の厳密解と比較し、計算精度を確かめた上で、流体領域として水みちを想定した浸透挙動の数値解析に取り組んだ。その結果、提案手法は多孔質領域と流体領域にまたがる流れを質量保存則を満たしながら首尾よく計算できることを示した。今後は、より複雑な計算領域の数値解析に取り組むとともに、パイピング現象のように時間経過に伴って流体領域の形状が変化する問題への適用を図る。

参考文献：1) 藤澤 和謙, 村上 章 (2019) : Darcy-Brinkman 式の不飽和領域への拡張, 農業農村工学会論文集, No.308, pp.27-36. 2) F. T. Tracy (2006) : Clean two- and three- dimensional analytical solutions of Richards' equation for testing numerical solvers, Water Resour. Res., 42, pp.1-10.