

物理探査におけるスパースモデリングの可能性

A Potential of Sparse Modeling in Geophysical Methods

珠玖隆行

Shuku Takayuki

1. はじめに

物理探査による地盤内の可視化は典型的な逆問題である。くに、得られる計測データの数 m に対して、未知パラメータ n が圧倒的に多い、劣決定問題 (underdetermined problem) を解かなければならない。劣決定問題の解法として Tikhonov の適切化法が代表的なものとして挙げられ、適切化項として、 l_2 ノルムを考慮した ridge 回帰¹⁾ がこれまで用いられてきた。しかしながら最近では、適切化項として l_1 ノルムを考慮した least absolute shrinkage and selection operator (lasso)²⁾ が注目されており、とくに圧縮センシングと呼ばれる分野で急速に発展している。lasso はもともと回帰モデルのモデル選択を行う方法として着目されていたが、解の疎性をうまく利用する「スパースモデリング」という方法論で広く知られるようになった。スパースモデリングを実現する lasso を用いることで、従来の ridge 回帰よりも少ないデータで精度の高い再構成結果が得られることが多数報告されており^{例えば3),4)}、物理探査分野への応用も今後期待される。

本稿では、lasso を用いたスパースモデリングの基礎と物理探査の応用例について示す。

2. 逆問題の基礎とスパースモデリング

例として、観測データ \mathbf{y} から未知パラメータ \mathbf{x} を推定する逆問題を考える。その際、 \mathbf{y} と \mathbf{x} に以下の線形関係があるとする。

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (1)$$

ここで、 \mathbf{y} を m 次元の観測ベクトル、 \mathbf{x} を n 次元の未知パラメータベクトル、 \mathbf{A} は $m \times n$ の観測行列とする。実際の逆問題は多くの劣決定問題であることが知られており、劣決

定問題をいかに解くかが実用上重要である。

解にスパース性が期待できるなら、以下の式を解くことで、未知パラメータベクトル \mathbf{x} を求めることができる。

$$\min \|\mathbf{x}\|_0 \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (2)$$

ここで、 $\|\mathbf{x}\|_0$ は l_0 ノルムと呼ばれ、ベクトル \mathbf{x} の成分のうち、非ゼロ項の個数を表す。「s.t.」は subject to の略語であり、 $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ が拘束条件となっている。よって式(2)は、方程式(1)を満たしつつ非ゼロ項を最小にする問題を解くことを意味する。式(2)を解くことでスパースな解が得られるが、そもそも解の中にどれだけのゼロの項が存在するのか、どこに存在するかは未知である。この問題は、全ての基底の組み合わせを試さないと最適解が得られない組み合わせ最適化問題であり、「NP 困難」であることが知られている。

そこで、式(2)を解くことを諦めて、代わりに次式を解くことを考える。

$$\min \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (3)$$

ここで、 $\|\cdot\|_1$ は絶対値ノルム (l_1 ノルム) を表している。実際の観測データを扱う場合には、データに含まれる誤差を考慮する必要がある。そのため、式(3)の代わりに、次式を解くことが一般的である。

$$\min \left\{ \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_1 \right\} \quad (4)$$

ここで、 λ は正則化パラメータである。式(4)は lasso 型の目的関数と呼ばれる。

3. 適用例

本稿では、図-1 に示すクロスホールトモグラフィを例にスパースモデリングの適用結

果を示す。図-2(a)は真値となる地盤断面図を表しており、トモグラフィーの結果からこの断面図を再構成するという数値実験を行った。図-2(a)は健全な地盤の内部にスポット的に空洞があるケースで、健全部の物性を10、空洞部の物性は0と仮定した。各セルの物性が未知パラメータであるが、空洞箇所は全体のセルの中のごくわずかであり、このままではスパースモデリングを適用することができない。そこで、事前情報として健全部の物性を考慮することで、スパースな解を誘導し、スパースモデリングを適用した。

図-2(b)(c)は再構成結果であり、(b)が ridge 回帰による結果、(c)が lasso による結果である。図から明らかなように、lasso がほぼ完全に真の地盤の状態を再構成できていることがわかる。(b)も実用的には問題ないが、ノイズが載ったイメージが再構成されており、全体的にグラデーションがかかった結果が得られている。一方、lasso は健全部と空洞部が明確に分かれた結果が得られている。

4. おわりに

本稿では、スパースモデリングの概要を示すとともに、そのクロスホールトモグラフィーへの適用結果を示した。スパースモデリングは劣決定問題を解くためのツールとして有効であり、とくに、得られる計測データが限定される物理探査分野において可能性のある方法である。今後は実データを対象とした有

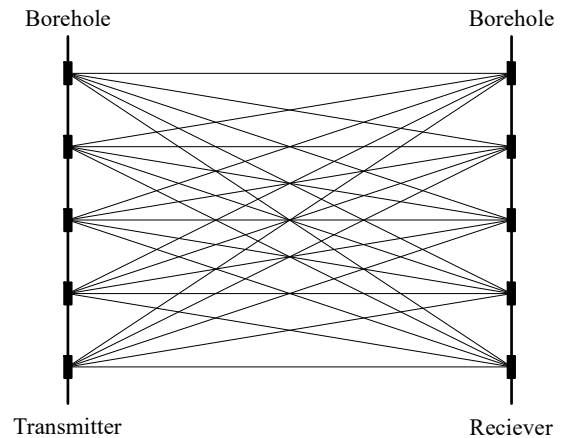


図-1 クロスホールトモグラフィー
Fig.1 Cross-hole tomography

効性の検証が求められる。

参考文献

- 1) Hoerl, A. E. and Kennard, R. W.: Ridge regression: Biased estimation for nonorthogonal problems, *Technometrics*, 12(1), 55-67, 1970.
- 2) Tibshirani, R.: Regression shrinkage and selection via the lasso, *J. Royal. Statist. Soc. B.*, 58(1), 267-288, 1996.
- 3) Lustig, M., Donoho, D. and Pauly, J.M.: Sparse MRI: The application of compressed sensing for rapid MR imaging, *Magn. Reson. Med.*, 58(6), 1182-1195, 2007.
- 4) 珠玖隆行, 吉田郁政: 地盤工学におけるスパースモデリング, *地盤工学会誌*, 65(10), 6-9, 2017.

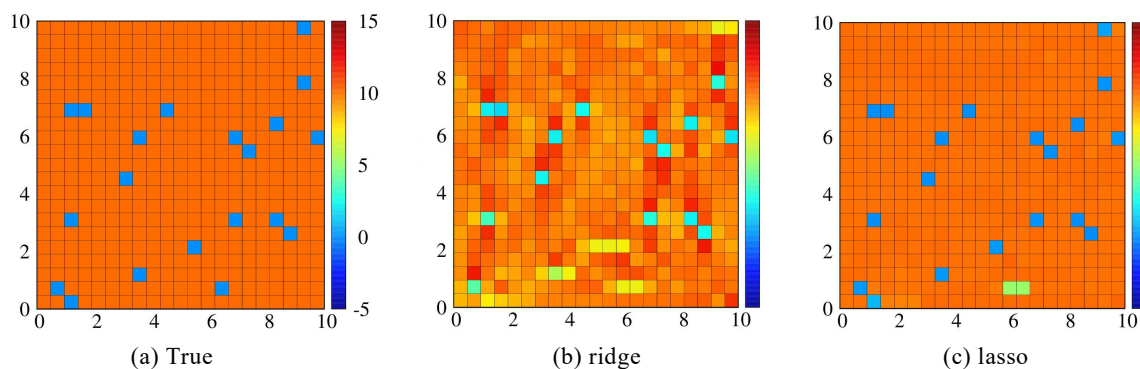


図-2 空洞推定
Fig.2 Cavity detection