時間積分特性を制御できる動的応答解析のための速度型有限要素法
Velocity-based Finite Element Method Controlling Time-integration Properties for Dynamic Response Analysis

○藤澤和謙*，黒田有紀**，シャルマ・ビカス*
Kazunori FUJISAWA, Yuki KURODA, Vikas SHARMA

1. はじめに

現在，大地震に対する農業用ダムの安全性評価が継続的に進められている．大地震を想定したレベル2地震動に対する地震応答解析には，これまで以上に安定かつ高精度な時間積分法が要求される．地震応答に限らず，構造物の動的計算には，適切な時間積分法が必要不可欠であり，現在でも高度な時間積分法の開発は研究対象となる．著者らは，空間方向だけでなく時間方向にも有限要素を利用するSpace-Time有限要素法（ST/FEM）を波動方程式に適用し，速度型Space-Time有限要素法（v-ST/FEM）を提案した[1]．同手法は，無条件安定かつ3次精度以上の時間積分性能を有するが，Amplitude decay（Dissipation）やPeriod elongation（Dispersion）といった時間積分特性を制御することができず，特に高周波成分の減衰効果を与えられない点が課題であった．この課題に対してDissipationを制御できるv-ST/FEMを，既に発表済みであるが，この方法では計算精度が2次に落ちることを確認している[2]．本稿では，ST/FEMによる固体の動的応答解析を一般化し，精度を落とすことなくDissipation等の時間積分特性を制御できるST/FEM（Combined v-ST/FEM）を提案する．

2. ST/FEMによる固体の動的解析の一般化

固体の動的応答解析において，ST/FEM の一般化の要諦は時間方向の有限要素法にあることから，変位が時間のみの関数となる以下の 1 質点の運動方程式を通して説明する．

$$\ddot{u}+\omega^2 u=0 \quad (\Leftrightarrow \dot{v}+\omega^2 u=0,\ \dot{u}=v) \tag{1}$$

ここに，u，v，ω は変位，速度，角周波数である．通常，時間方向の有限要素法には線形一次要素を用いることから，変位に対する 2 階時間微分を避け，式(1)の括弧内に記載した変位 u と速度 v の両方を変数として 2 つの方程式を解く．これまで提案された ST/FEM の定式化の違いは $\dot{u}=v$ をどのように解くかにある。例えば，時間方向の有限要素法を $\dot{u}=v$ に適用する場合，時間を t で表し，$T_1(t)$ と $T_2(t)$ を線形一次要素（2 節点）の形状関数，時刻 t_n と t_{n+1} での速度 v_n と v_{n+1} とすれば，変位の数値解 u_{uv} として式(2a)を得る（速度は $v=v_nT_1+v_{n+1}T_2$ と近似）．また，v-ST/FEM では $\dot{u}=v=v_nT_1+v_{n+1}T_2$ を厳密に積分することで数値解 u_v は式(2b)の形となる．

$$u_{uv}=u_n+v_n\left(\frac{T_1}{2}+\frac{T_2}{6}\right)+v_{n+1}\left(\frac{T_1}{2}-\frac{T_2}{6}\right)\ ,\ u_v=u_n+v_n\left(\frac{T_1}{2}+\frac{T_1T_2}{2}\right)+v_{n+1}\left(\frac{T_1}{2}-\frac{T_1T_2}{2}\right) \tag{2ab}$$

ここに，u_n は時刻 t_n における既知の変位である．式(1)（具体的には，$\ddot{u}+\omega^2u=0$）の弱形式に式(2a)または式(2b)を代入することで，速度 v_n と v_{n+1} が求まる．空間方向の微分を含む固体の波動方程式においても，空間方向に（有限要素法によって）支配方程式が離散化されれば，時間方向の常微分方程式となるため，同様の手順で変形速度を求めることができる．これが，微小変形を仮定した固体の動的解析対する Space-Time 有限要素解析である．

変位と速度の関係を表す $\dot{u}=v$ からどのように変位を（離散化された速度の関数として）求めるかが ST/FEM の定式法にバリーションを生む．これにより，時間積分特性も変化することから，この変位近似のバリエーションを利用して，ST/FEM による時間積分特性を制御することが本研究の着想である．

*京都大学 Kyoto University，**農林水産省 Ministry of Agriculture, Forestry and Fisheries
Keywords: 動的応答解析，時間積分，スペクトル半径

3. Combined v-ST/FEM

式(2)に示した 2 つの変位の近似解 u_{uv} と u_v の線形結合により，新しい近似解 u_{cv}

$$u_{cv} = \alpha u_{uv} + (1-\alpha)u_v \tag{3}$$

を与える．式(3)においてαは 0 から 1 の範囲の値を取る解析定数である．このように，変位の近似解を与える方法を Combined v-ST/FEM と称する．図 1 に，この形状関数を用いた場合のスペクトル半径 ρ を$\Omega=\omega\Delta t$ の関数として示す（Δt は t_{n+1}-t_n を意味し，スペクトル半径はΩのみの関数で与えられる）．同図において，α ＝0 は v-ST/FEM に対応するものであり，α の値が大きくなるにつれて高周波成分を除去できることが分かる．これは，非常に好ましい性質であり，動的応答解析では避けることのできない数値振動を効率的に取り除くことができる．しかし，図 2 に示すように，数値的な時間積分による減衰率（Algorithmic damping ratio）はαが0で最も小さく，1に近づくにつれて大きくなるため，許容される減衰の大きさに合わせて，高周波成分である数値振動を取り除くようにαの値を制御すればよい．このような柔軟な解析条件の設定を可能にすることが，時間積分特性を制御できることの利点となる．

式(1)において$\omega=2\pi$ とし，変位と速度の初期条件に 0 m と 1 m/s を与えた時，時間ステップ幅Δtを変えて行った数値計算結果（時刻 18.9 秒での速度 v）と理論解速度の誤差 e_v を図 3 に示す．縦軸に誤差（対数），横軸にΔt（対数）を取るとき，プロットの傾きが時間積分の精度に対応する．同図からは 0<α<1 において 3 次精度を保つことが分かる（αの値を変えた直線がすべて平行）．精度を保つ理由は，式(3)で与えられる u_{cv} が T_1 と T_2 を重み関数に採用した$\dot{u}-v=0$の弱形式を満たす弱解となるためである．

以上から，Combined v-ST/FEM はαの値によらず 3 次精度を有し，その値を変えることで時間積分特性をコントロールしつつも，その精度を保つことを可能にする方法となる．

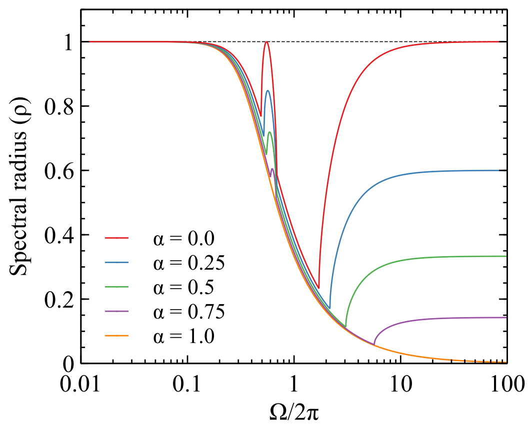

図 1　αによるスペクトル半径の変化

Fig. 1　Spectral radius changed by α

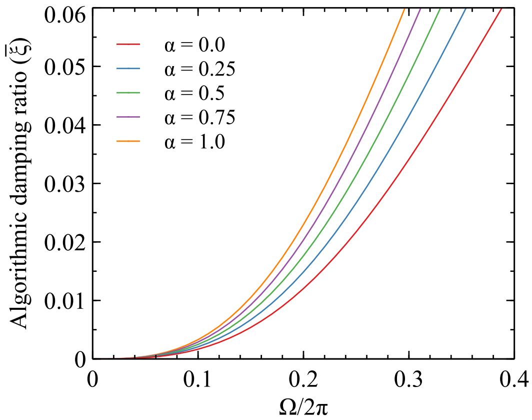

図 2　αによる減衰率の変化

Fig. 2　Algorithmic damping ratio changed by α

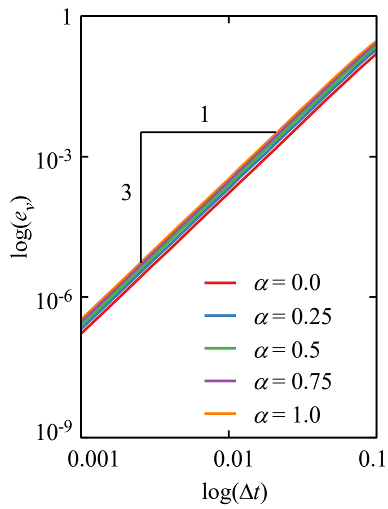

図 3　誤差と時間ステップ幅の関係

Fig. 3　Error vs. time step size

参考文献：1) Sharma, V., Fujisawa, K. and Murakami, A.: Velocity-based time discontinuous Galerkin space-time finite element method for elastodynamics. *Soils and Foundations*, **58**(2), 491-510, 2018. 2) V. Sharma, K. Fujisawa, A. Murakami and S. Sasakawa: A methodology to control numerical dissipation characteristics of velocity based time discontinuous Galerkin space-time finite element method, *Int. J Numer. Methods Eng.*, **123**, 5517-5545, 2022