

土の弾性・粘性・塑性

山形大農 須藤清次

土の力学的性質は土木・農業で古くから取扱われてきた。したがって技術的にはそれぞれの場合の取扱いや計算法が行なわれてはいるが、理論的にみればそれらは体系だてられていないから新しい技術的課題にたいしては有効性が少ない。そこで土の変形・流動を土の理化学的性質を考慮して体系的記述を試みる。

I 土のとらえかた

1. 連続体と粒子系

一般に材料の力学は連続体 (continuum) の力学として体系化されて実用的課題に応えてきた。そのあとで物性論の誕生により、材料を構成する粒子 (原子、分子) 間の相互関係から材料の力学的性質が研究されるようになった。ところが土の力学はそれとは逆にまず粒子系 (particle system) として出発し、あとから連続体の力学が取り入れられた。土を構成する粘土・砂は粗粒子であるから、それらの粒子間の関係は古典的・初歩的法則によつて表わすことができる。そのため鉄や水などの力学のような発展過程をとらず逆に粒子系から出発したものであろう。

古典的に表わされた粒子間の関係は簡明ではあるが、それから推論するときにはもとの原理の適用範囲を知っていなければならない。たとえば、土の摩擦抵抗 S を固体間の外部摩擦法則 (クーロン則, 1773~1801) $\tau_f = c + \sigma \tan \phi$ (c : 粘着力, ϕ : 摩擦角) により取扱うとき、土の変形においてポアソン比は一般にかなり大きいから図1の面力 (traction) σ_n だけでなく側方の条件により τ_f の値はことなつてこよう。

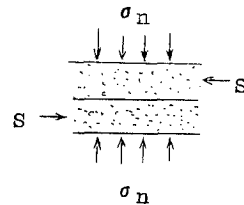


図 1

また粒子間の凝集力を毛管力理論 (ラプラス・ヤング 1804, ヘインズ 1925) により解釈しようとするときは、普通の水は常温で $p_F > 3$ の相圧による液体は存在し得ないから、強い凝集力には毛管力理論は適用することができない。

土を連続体としてとらえるときはマスのとしての土の弾性・粘性に基づく現象すなわち変形・

流動を定量的に表わすことができる。その場合には粒子の性質は問わないで変形・流動に関する物理常数（弾性率、粘性率、降伏値など）がわかればよい。しかし土の力学的性質を変えようとする場合には粒子間の関係がわからなければ方針が出ない。粒子系の性質はこのような意味において土壌学の一つの課題となろう。

前述の固体摩擦や毛管力は土の強度すなわち塑性の限界（降伏）の問題である。土ではたしかに降伏による塑性変形や破断が大きな問題であるが、場合によつては弾性変形も問題になりうるし、とくに降伏前・後の粘性は無視し得ない役割を占めている。

毛管力を取上げるときは引張り強度の問題が多いが、土では一般には圧縮にたいする抵抗とずり抵抗が課題になる。したがって圧縮やずりを粒子系でどう取扱うかが重要であるが、これらは今後の課題であつてわれわれはまだ充分な理解に達していない。

2. 連続体としての土の挙動

金属材料では普通は応力と歪の関係で弾性が大きな課題であるが、土では粘弾性 (visco-elasticity) を無視することはできない。

粘弾性挙動では後述 (II-2) するように粘性要素が弾性要素に並列または直列に加わる。粘性が直列に加わると (マクスウェル) 液体のようにも考えられるが、液体的か固体的かは η_M の大きさ (厳密に言えば η_M / G_M の大きさ) によつてきまる。フオークト模型はいかにも硬く固体的にも見えるが、フオークト模型はかならずしも硬いことや固体的であることを意味しない。たとえばフオークト模型は柔らかい土壌ペーストの挙動を表わし、マクスウェル要素は液性限界より硬くなつたときに土の力学的模型のなかに入つくる。

長いタイム・スケール (time scale) でみればフオークト体は固体にみえ、短いタイム・

スケールでみれば液体にみえる。またマクスウェル体はその逆になる。液体的か固体的かは観測時間の問題であるわけである。タイム・スケールは η_K / G_K , η_M / G_M できまる。それぞれ比は定荷重での歪 (strain) の遅延 (retardation) と定歪での応力 (stress) の緩和 (relaxation) の物理的半減期 τ_K , τ_M を表わす。このような観点から土

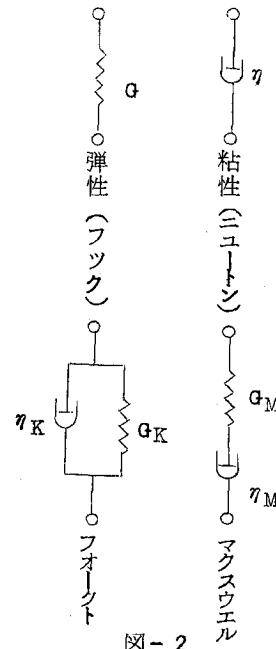


図-2

の力学的性質は次のような四つの方法で認識されよう。

- (i) 形の回復可能な変形すなわち弾性変形(固体)。
- (ii) 不可逆な変形すなわち流動(液体)。
- (iii) 粘弾性体では歪の遅延時間または応力の緩和時間。
- (iv) 固体または粘弾性体の弾性要素の強度すなわち降伏値。さらに降伏後の塑粘性。

3. 粒子系としての性質

粘土・シルトのように水とコロイド系をつくるものと、砂とに大別して考える。

(1) コロイド

土壌コロイドはハイドロ・フオビック・コロイドで、土粒子界面は通常は負電荷をもち分散媒(水)のなかの正イオン界面電気二重層をつくっている。土粒子間には静電氣的反力による反撥ポテンシャル V_R と粒子間のロンドン力(ファン・

デン・ワールス力)による吸引ポテンシャル V_A とで粒子間の力学的ポテンシャル V がきまる。板形球子では

$$V_R = A_1 \exp(-2Kd), \quad V_A = A_2 / d^2$$

a : 粒子間距離, $1/K$: 拡散二重層の厚さ

$$\text{引力} = \partial V / \partial a, \quad V = V_R + V_A$$

V_R は速く(200Å)まで働らくが V_A は斥力より狭い(20Å)。図3はポテンシャル曲線であるから、粒子間が近づいて曲線を昇るときは抵抗を受け曲線の谷間に

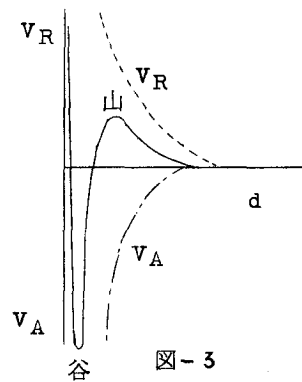


図-3

に落ちていれば粒子間が離れようとするときに抵抗をうけて凝集体は安定であることを示す。

ポテンシャルの山が高ければ接近(圧縮)抵抗は大きい。粒子間には拡散二重層以外の要素も考えなければならないのであるが、いま近似的にこの模型で考えるならば土の圧縮挙動は対立イオン(counter ion)の熱運動によるエントロピー弾性であるといえる。この模型では引張り抵抗は無視されるが、実際にも分散した系では引張りは考えない。

その場合は流動に影響する。サスペンションの比粘度 η_{sp} はミセルの体積濃度 ϕ により

$$\eta_{sp} = 2.5\phi + 1.41\phi^2, \quad \eta_{sp} = \frac{\eta}{\eta_0} - 1, \quad \eta_0: \text{分散媒の粘度}$$

で表わされる。

(2) 砂(粗大粒子)

砂の間の関係は前述(I-1.)したクローン・モールの式で表わされているが、厳密な降伏条件はあと(II-3)で触れる。引張りにたいする抵抗は水の表面張力と負圧によるが、その

場合の適用限界については既に述べた。

クーロン・モールの式による降伏条件(モール, 1900)は土にたいして適用されているが、この式自体は二つの粒子間のずり抵抗の関係である。したがって粗大粒子間の相互関係およびずり強度 τ_f として取扱うときはよいが、一般にある応力状態(テンソル)におかれた土の強度とは別である。

4. 土と他の物体との関係

車輛の走行や耕耘の場合はいま十分に記述し得ない。ここでは付着が問題になるが、それは固体の外部摩擦のような簡単な関係式で表わしうるマクロな現象ではなくマイクロな現象であつて、現在行なわれている現象の分析法の範囲ではマイクロな分子的挙動には迫り得ないと考えられる。

(1) 摩擦

車輛や鉄に土が付着しないならば、固体の外部摩擦すなわちクーロン則による抵抗がそのままあてはまる。この場合にもマクロな摩擦法則だけでは充分ではない。それは土が σ の増大により軟化(III-1)を起し、その結果摩擦角 ϕ が減少して抵抗 S の増大が緩やかになるからである。

(2) 付着

付着の機構はさておいて、付着が起きている場合には抵抗は土の内部で引起こされる。そのときは土の状態により、土はビンガム流動またはサン・ブナン塑性挙動を起す(II-3)。図4で点線の中の土は動くことになる。

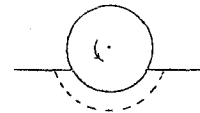


図-4

II 変形・流動の定式

1. 弾性・粘性

固体の歪による抵抗 P は歪の大きさ ϵ に比例する。

$$P = G \epsilon \quad G: \text{弾性率}$$

液体の抵抗は歪の起る速度 $\dot{\epsilon}$ ($= d\epsilon / dt$)に比例する。

$$P = \eta \dot{\epsilon} \quad \eta: \text{粘性率}$$

これらの式は図2のようにスプリングとダッシュ・ポットにより図形に表象できる。

土のわずいサスペンションは液体とみてよいが、固体とみなせる土は大きい等方圧 (hydrostatic pressure) を受けた砂ぐらいのものである。土は一般に固体とみるのは無理であるが、低次の近以としては固体とみて (大きいタイム・スケールで) 弾性率を求めることがある。

2. 粘 弾 性

簡単な粘弾性はフォークト体とマクスウェル体で (図 2), この二つの型式は粘弾性の呈する二つの力学的特徴である歪の遅延と応力の緩和の典型を示す。

(1) フォークト体

フォークト体の力学的挙動は次式で表わされる。

$$P = G_K \epsilon + \eta_K \dot{\epsilon} \quad \text{または} \quad P / G_K = \epsilon + \tau_K \dot{\epsilon}$$

$$\tau_K = \eta_K / G_K : \text{歪の遅延時間}$$

図 2 から直観されるように、フォークト体は有限の応力では形の永久変形はないから固体的粘弾性ともいわれる。しかしすでに述べたように固体的か液体的かは観測時間が長いか短いによりきまるものである。

歪の遅延は次式で表わされ、 τ_K の大きさは $PF \approx 2$ で数十秒である (図 5)

$$\epsilon = \frac{P}{G_K} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_K}\right) \right]$$

土壌ペーストはフォークト体とみることができる。このとき土壌コロイドはミセルが相互に接触していて自由水は存在しないならゲルでありハイドロ・フィリツク・コロイドとみなしてよいと考えられる。

(2) マクスウェル体

これは次式で表わされる (図 5)。

$$\epsilon = \frac{P}{G_M} + \frac{Pt}{\eta_M} \quad \text{または} \quad G_M \epsilon = P + \frac{Pt}{\tau_M}$$

$$\text{応力緩和は} \quad P = P_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_M}\right)$$

$$\tau_M = \eta_M / G_M : \text{応力緩和時間}$$

土壌サスペンションは一般的にはマクスウェル体といえるが弾性項は普通では観測されない。この場合は土粒子の回

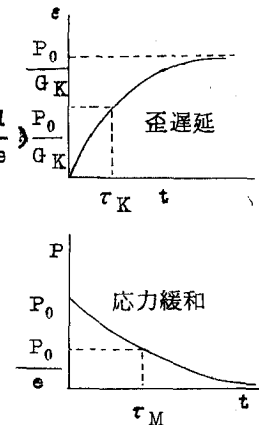


図-5

転ブラウン運動による形の回復が考えられるのである。

土では液性限界より低含水量の状態でもマクスウェル模型が土の力学的挙動のなかに現われてくる(Ⅱ-2(3))。その場合は土の間隙(pore)により不可逆な変形すなわち粘性流動 η_M が起こると考えられる(アイリングの液体粘性の理論との類以)。弾性変形 G_M は蜂巢構造による偽高弾性である。

固い土に現わる応力緩和時間は $PF \approx 2$ で数十分である(コンクリートは1月, ガラスは1年)。

(3) 土の力学的模型

土の力学的性質は経験的に含水量により三つに大別することができよう。サスペンション・ペースト, 固い土である。分子レベルの粒子で構成され物体は等圧の下で状態量(state variable)として温度 T の変化により相転移がきまる。土の力学的性質にみられる上述の三種の状態, 二つの転移点(transition point)は等温・等圧の下における土のみかけ体積と含水量の変化によつて起きる。この場合の状態量(内部エネルギー U)の変化を次式によつて考えてみよう。

$$dU = T ds - dW \quad dW = P dv (+dw_0), \quad W_0: \text{ずり仕事}$$

相図は P, T を座標として表わされるから, 相変化はエネルギーの強度因子(intensity factor)が指標になるといえる。したがつて等圧下での相変化は P が指標になる。後述(Ⅲ-3)の降伏現象や振盪によるゾルーゲル転換は dW_0 の力学的作用による転位といえる。

土壌学では μ は比自由エネルギーを表わし, $PF = \log(-\Delta\mu)$ であるが $-\Delta\mu$ は P と等価であるから, PF がサスペンション・ペースト・固い土の転移の指標となると考えられよう。

土の力学的模型は含水量(PF)により図6のように分類できる。ただし図6では降伏現象の挙動を示す模型(ビンガム模型)がつけ加えられている。また固い土の符号は E : ヤング率, λ : トルーション粘度, qu : 一軸(単純圧縮)強度の形式にした。他の二つはずり挙動で表わしてある。なお固い土(不飽水)でみられるイニシヤル・セット(初期のほとんどの瞬間的な塑性変形)はここでは触れなかつた。

※ 土質工学会シンポジウム(1965年11月)「土の強度」(須藤)参照

須藤・東山・山崎「土のレオロジカルな構造」土と基礎投稿中

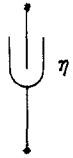
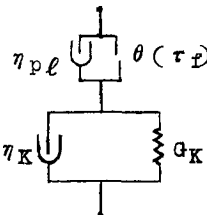
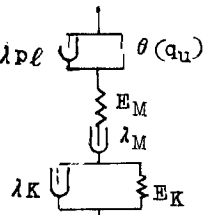
分類	サスペンション	ペースト	固い土
pF	- 1.5		1.5
力学的状態	ニュートン	フォークト	パーガース
模型 (降伏を含む)			
構造	ハイドロ・フォビック コロイド(ゾル)	ハイドロ・フィリック コロイド(ゲル)	ゲルを骨格とする 蜂巢構造

図 - 6

3. 塑性

(1) 降伏現象

土壌ゲルを振盪してゾル化して分散する現象や湿田のめり込みなどは降伏現象である。その場合に単純ずりであればずり降伏値 τ_f ，単純圧縮であれば一軸圧縮強度 q_u が降伏値 (yield value) となる。単純ずりについては一般的に次のレオロジー方程式で表わされる。

$P_t - \tau_f = \eta_{p\ell} \dot{\epsilon}$ ， P_t : ずり応力， $\eta_{p\ell}$: 塑粘度
これはビンガム流動の式であつて図7の実線で表わされる。
金属などでは $\eta_{p\ell} = 0$ の形すなわち $P_t = \tau_f$ となりサン・ブナンの式になる。(図で点線)。

土壌ペーストや液性限界付近の土はビンガム流動するが、液性限界よりはるかに硬い土ではサン・ブナン挙動をすると予想される。降伏は等温下での力学的作用による転移である (レオロジ・ハンドブック, P179)。

降伏値 θ は前述のように pF によりきまると考えらるのであるが、実験的にも降伏値と pF との対応がみられる (図8)

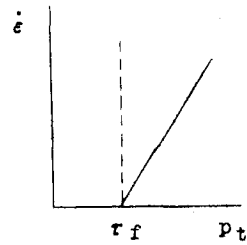


図 - 7

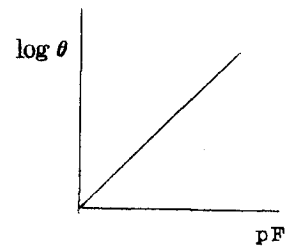


図 - 8

ここで降伏値の対数とPFが等価であるというときに降伏値は τ_f か q_u が明らかでないが τ_f を採用するのが妥当とも考える。理論的には $\tau_f = \frac{q_u}{\sqrt{3}} \approx 0.58 q_u$ (ミゼス・ヘンキー理論)の関係がある。

(2) 降伏条件

降伏の力学的条件は一般的には次のように表わされる。物体は等方圧(球テンソル)の下では降伏しないことは経験から受け入れられる。したがって降伏の原因になるのは応力(テンソル)のずり成分(偏差応力テンソル)である(ミゼス・ヘンキー)。降伏の力学的条件は次式で表わされる S の値に達したときである。ある状態から降伏(転移)点までのエネルギー差はずり仕事量(レジリエンス)に当る。

$$S^2 = \frac{1}{6} [(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2]$$

S^2 : 偏差応力テンソルの二次の不変量

$\sigma_i, i=1, 2, 3$: 各主応力

これは主応力軸に等傾斜の平面に垂直な円筒で、その等傾斜面への射影は図9の円になる。土質力学で普通つかわれているクーロン・モール説は上の円筒に内接する六角筒で図9の点線で表わされる近似的である。前述の実用降伏値は次式で与えられる。

$$\tau_f = S, \quad q_u = \sqrt{3} S \approx 1.73 S$$

多孔質(porous)物体では S は等方圧 σ_m (応力テンソルの一次不変量、 $(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3$)により変化する(シュライヘル・ミゼス, 1926)。

$$S = f(\sigma_m) \approx C_0 + \sigma_m \tan \phi_0$$

これはクーロン・モール則 $\tau_f = C + \sigma \tan \phi$ と同様な意味を表わすが、後者は前者の近似的である($\because S : \tau_f, \sigma_m \approx (\sigma_1 + \sigma_3) / 2 = \sigma$)。図9で円の半径は σ_m とともに増大することになる。 σ_m は $p dv$ の p にあたる。

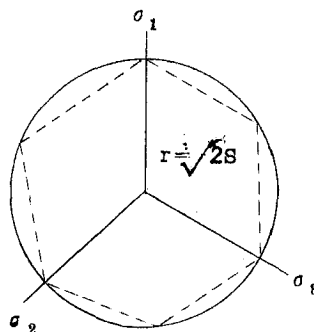


図-9

III 異常粘弾性挙動

いまここでは弾性は応力と歪との関係が直線的であるとして記述してきたが、実際の土の挙動は

直線にはならない。粘性の場合の応力と歪速度も同様に非線型になる。このような現象は応力または歪の変化により常数 G , η に軟化 (softening) や硬化 (hardening) が起こるからである。

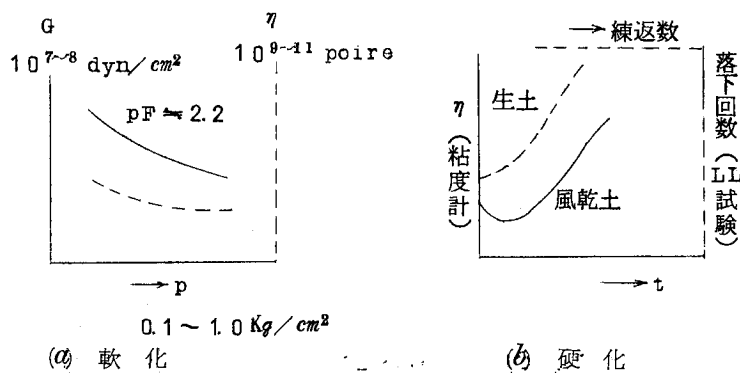
(1) 軟化・硬化

自然土は硬いが乱した土が軟くなる場合はよく問題にされる。このようなチクソトロピー (thixotropy) は土の硬い性質を利用しようとするからよく注目されるわけであるが、われわれはこのような軟化よりも硬化につきあたる場合が多い。

含水量が液性限界より高い場合には間隙構造の破壊により間隙水の自由化が行なわれて軟化し、その回復は殆んどない。このような現象は水中で形成された土 (湿田土、瀉土) にみられ、ミクロなカード・ハウス (card-house) 構造や微細な団粒間隙が発達している。

含水量が液性限界より低い場合は、外力の増大過程でのみ軟化を起こす。この場合は定外力を維持すると

少しは回復 (硬化) する。以上からわかるように軟化は含水量は一定であるが外力による



構造破壊で pF が下がることによつて起きる。

硬化は pF でいえば pF が高くなることに対応する。水に圧力が加わると pF の低下をもたらすから軟化となり、しかし可排水または不飽水系の充填の進行は硬化をもたらす。したがつて非排水の飽水系で硬化が起きる条件はずりによる構造破壊の効果だけとなる。構造のなかに閉じ込められている水は不平衡で一般に外面部分の水より高 pF である。このようなときに外力のずり成分で構造が破れると、系内の水の平衡が促進されて外面の水は高 pF になる。その結果として G , η は硬化を起こす。このような現象が山土、畑土で見られるのは当然であろう。関東ロームの下層土は山土であつても硬化がみられない。それは関東ロームの粘土がアロフェンまたは加水ハロイサイトであつて極めて親水性が高く水の平衡が実現しやすいためであろう。

軟化・硬化を応力との関係でまとめると次のようにいえよう。軟化は応力の等方圧成分による

水の圧縮により、硬化は飽水系では応力の偏差（ずり）成分により不飽水系では等方圧成分によつて起きる。多孔質物体では硬化は歪硬化（strain hardening）または加工硬化と呼ばれる。また硬化はその内容からいつて土壌水の不平衡ができるために起きるから速度を伴う現象である。軟化が起きるか硬化が起きるかは応力状態によつてもことなるが、普通は土の状態・構造によつて大体きまることになる。

(2) その他

レオペクシー（rheopexy）はゾルに軽い振動を与えるときゲル化が促進される現象である。これはチクソトロピーの解釈と背反するようにもみえるが、次のように考えれば統一的に理解できよう。ハイドロ・フオビック・コロイドとしてのゾルを前述（I-3(1)）のように拡散電気二重層の模型で考える。ゲル→ゾルの力学的不安定化による自由エネルギーの増大はエントロピー流出（flow）となる。系が原状態に回復するためにはエントロピー流入がなければならないが、これは速度過程の現象である。そのとき攪乱効果を抑えるような振動によりエントロピー生成（production）があるならば原状態への回復が促進される。

海岸や川辺の砂でみられるダイラタンシー（dilatancy）すなわち圧縮による体積膨長がよく経験されることである。ダイラタンシーはざり応力成分により密充填から疎充填になることによつて起こされる。過圧密（over-consolidated）粘土でもダイラタンシーがみられるのは、

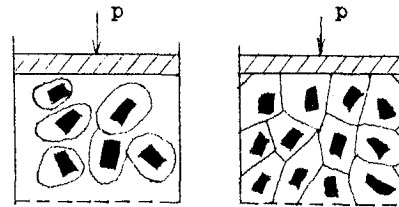


図 - 1 1

過圧密 P_0 による歪硬化で PF すなわち S は高くなり、そのため低い P で圧密するときに P では降伏しないミセルの最密充填の構造ができていたためと考えられる。

IV 測定上の二三の問題

土のコンシステンシーはいろいろな方法で測定されている。そのなかに変形・流動の物理常数の測定を行なっているものもあれば経験的な抵抗の度合を較べているものもある。土を利用するときの境界条件は複雑な場合が多いから、物理常数がわかれば結論が導びかれるというほどには簡単ではない。したがって経験的測定法による実用的役割は大きい。しかしその場合にどんな力学的現象が進んでいるかということを知らなければ経験的測定法の適用を誤まることになる。

1. 力学的常数の測定

図6に示した模型による模型常数(model constant)は次のような方法によつて求めることができる。

i) 回転粘度計: ニュートン模型の粘性率 η , フォークト模型の降伏による塑性流動の常数 τ_f (ずり降伏値)と塑粘度 $\eta_p \phi$ 。

ii) 一軸圧縮試験: フォークト模型のヤング率 E_k とトルートン粘度(のび粘度) λ_k , パーガス模型のヤング率 $E_M \cdot E_k$ とトルートン粘度 $\lambda_M \cdot \lambda_k$ 。さらにフォークト模型およびパーガス模型の一軸(単純圧縮)強度(降伏値) qu が測定できる。

iii) 三軸圧縮試験: 一軸試験による qu ではシュライヘル・ミゼスの関係 $s = f(\sigma_m) = C_0 + \sigma_m \tau \phi$ 。すなわち等方圧 σ_m に伴う強度の変化がつかめないが三軸試験では側圧 σ_3 が可変であるから $\sigma_m (= \frac{1}{3}(\sigma_1 + 2\sigma_3))$ を変えて $s = f(\sigma_m)$ の曲線が行われる。なお振動粘度計による動的性質の測定については省略する。

ずり挙動の常数 η , G , と圧縮挙動の常数は λ , E , との関係は等性物体では $E = 2(1+\nu)G$ であるから, 非圧縮性(ポアソン比 $\nu = 0.5$)であれば $E = 3G$ で粘性の場合も同様に $\lambda = 3\eta$ である。土では $\nu = 0.4 \sim 0.5$ であるが, 上の三倍則は実用的には使用してよい。

2. 経験的方法

土の抵抗を測るための経験的方法としては貫入抵抗(各種ペネトロメーター, 落下N値など)を測るものと圧縮抵抗(載荷式・落下式)を測るものがある。

前者には圧縮強度・圧縮弾性・固体の接触摩擦・粘性・緩和時間が関係し, 后者にはイニシャル・セット(initial set)・圧縮強度・遅延時間が関係する。経験的方法は複雑な応力分布での挙動を総合的に計っているので特定の力学的常数は得られないが, 試験器の形や試験速度を考慮すれば力学的常数も導かれる場合もある。これらの選択は実用目的に近似したものがよいことになる。

アツタベルク試験は経験的方法ではあるが, 土の転移点を決定するという意味をもつていと考えられる。

この報告をつくるにあたり山形大 東山勇氏の協力を戴いたことを感謝します。

引 用 文 献

- 1) 山崎不二夫ほか6名：農土論集14, 1965
- 2) 妹尾 学：土壤粒子の分散と凝集(1),(2)
農業技術, 17, 221~225, 340~343, 1962
- 3) 須藤清次, 安富六郎：土壤のレオロジー,
土肥誌, 34, 296~306, 1963
- 4) 安富六郎：土壤のコンシステンシーの測定法
土壤の物理性, 11-12, 9~22, 1964
- 5) Reiner, M : Deformation, Strain and Flow, Lewis, 1960
山田・柳沢訳 : レオロジーの基礎理論, コロナ, (1962)
- 6) 中川鶴太郎：レオロジー, 岩波, 1960
- 7) van Olphen, H: Clay Colloid Chemistry, John Wiley, 1963