土壌水運動理論の諸系列(2)

——その内容と評価——

III　Darcyに始まる飽和流の研究*　(そのI)

浸透理論体係化研究グループ

1.　はじめに

執筆担当　中野　政詩

飽和流に関する研究といえば，ある人はラプラスの式の解法に関する研究を思い浮かべたり，又ある人は飽和流から不飽和流への展開の過程を頭に描いたりするかもしれない。しかし，われわれは，まず透水係数に関する研究を含めた意味での Darcy 則に関する研究を思い起こさねばならないであろう。なぜならば，飽和流に関する諸研究の中ではこの研究がより基礎的な研究の部類に属し，かつ歴史的にも研究のスタートが早かったからである。しかも，この研究の発展を顧みることこそが，現在の飽和流に関する研究の中でわれわれが直面している諸困難の打開をもたらすのではないかとわれわれは考えるからである。

Darcy に始まる飽和流の研究，この発展の経過をここでおおまかに述べておくことにする。

よく知られているように，Darcy 則は1856年に H. Darcy[1] により実験的に見つけられたものである。Darcy は浄水槽の濾過水量の決定という技術的要請に基づき，砂層特性の粒径による把握と抵抗係数をはかるという当時の水理学の研究様式に助けられて，Darcy 式と呼ばれる

$$v=k\frac{S}{l}(h+l\pm h_0) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1\text{-}1)$$

なる関係式をみつけた。ここで，v：流量，k：砂の透水性による係数，l：砂層の長さ，S：砂層の断面積，h・h_0：給水・排水部の水の圧力。Darcy のこの研究が，飽和流に関する研究の出発点となったことは言うをまたない。

Darcy がこの研究を公表した後の十数年間というものは，J. Dupuit, G. Thieme, Smrecker, Zeelheim, Hazen, P. Forchheimer 等の手により，(1)(1-1)式の一般性に関する研究とか，透水に関与する因子分析（透水係数に関与する因子分析といってもよい）の研究などが活発におこなわれた。その結果，低速の場合の (1-1) 式の成立性が確認され，高速の場合には，

$$J=av+bv^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1\text{-}2)$$

なる関係が成立することがみつけられ，透水係数が，温度・粒径・土粒子の表面積・間ゲキ率などに依ることがみつけられた。ここで，J：水頭勾配，v：流速，a・b：定数。

こうした研究成果は，地下水・石油・土木の分野における有効な武器という役割を (1-1) 式に与えると同時に1900年前後になっては (1-1) 式を理論的に導びき，その過程で透水係数を支配する因子を明らかにしようとする考え方を研究者に与えた。

このような試みを最初にまとめたのは，C. S. Slichter[2] (1898) である。Slichter は，土の粒子性と間ゲキ性を量的には粒経と間ゲキ率でとらえ，質的には間ゲキ性を毛細管的にとらえた。そうして，Poiseuille 式の中の断面積と長さに，これらの諸量とつまり方を投入した。Slichter のこの体系は，結果として粒径があらわに含まれていたため，土における粒径の分布と粒子の形の不均一性をうまく処理することができなかった。この事情と Poiseuille式における円形断面と実際の土の間ゲキの形・つながり方との関係に関する興味が，J. Kozeny[3)4)] (1927, 1928)等の径深理論を生み，おくれて L. D. Baver[5)] (1938) 等の間ゲキと流量との関係に関する研究を生み，それをふみ石として W. R. Purcell[6)] (1949) 等の間ゲキ分布理論を生み出すことになった。しかし，この径深という因子・間ゲキ分布の定義は，すでに F. C. Blake[7)] (1922)・J. Donat[8)] (1937) によりそれぞれ考えられていたものであった。

Kozeny は，2つの研究報告を出している。1927年の報告では，最初に流れがおこっている土の全間ゲキを1本の円形毛細管と仮定して Navier-Stokes の式を解き，流量と土の径深・間ゲキ率との関係を導びき，次に球形粒子モデルを使って最終的に土の間ゲキ率・粒径と透水係数を関係づけた。ここにおけるモデルの不統一性など理路の混乱が Zunker との論争を生み，その結果として1932年の報告が生まれたと考えることが出来る。

1932年の報告では，球形粒子モデルにおける水の流動抵抗を考え，次元解析により流量と土粒子の表面積を関

---

* この原稿の討論には，田渕俊雄(東大農)，中野政詩(東大農)，中村良太(東大農)，矢橋晨吾(教大農)，八幡敏雄(東大農)が参加した。

係づけた。

Baver 等の研究を踏み石にした Purcell 等は，水分持性曲線から間ゲキの大きさの分布を定義するという考え方の助けをかりて，種々の大きさの径をもつ毛細管の集合モデルを設定し，Poiseille 式の中の毛管径の処理をした。

Kozeny は，はじめに Slichter の体系をその難点を克服しながらも全面的に受け入れ，最終的には粒子性に関する把握を強調していったのに対し，Baver, Purcell 等は逆に Slichter の体系の毛管性に関する把握を Kozeny の初期の研究の影響を受けながら強調していったのである。その結果，粒径は Kozeny の初期を，間ゲキ率は Kozeny の後期を最後にして，透水における要因の役割を間ゲキ分布に譲り渡したのである。間ゲキ分布理論は，その後，Childs, Marshall 等の手により更に発展を続けることになる。（飽和流から不飽和流への発展の章一未発表一参照）

1950年前後になると，研究は新しい段階を迎える。Poiseuille 式より更に一段階前にさかのぼり，一般的な運動の方程式をたてることからはじめて Darcy 式を導びき出そうという試みが盛んになった。この種の研究を試みた研究者としては，古くにはパブロフスキィがいた。又 Kozeny の前期にもその気配がみられた。しかし，1950年前後には，高木，沢田，村本，中村，Hubbert, Irmy, 吉田等により相前後して報告が出されている。ここでは，土は粒子と間ゲキということで理解され，Darcy 式の誘導は Navier-stokes 式の各項の平均化・積分・直接的変換，仮想流体を支配する方程式に基づく変換などによりおこなわれる。その結果は，Darcy 式が一般の運動方程式の近似解であることや透水係数が一つの物理量であることを主張している。

Darcy から現在に至るまでほぼ100年の間，Darcy に始まる飽和流の研究は，以上のように展開されてきた。以下に，各々の研究の内容と評価をもう少し詳しく述べてみよう。

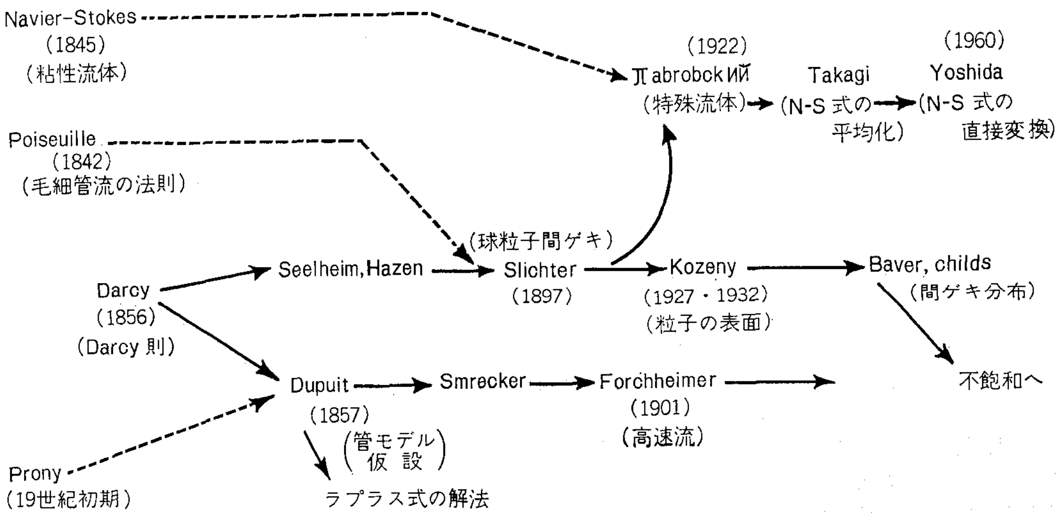
2. H. Darcy の研究[1)]　　執筆担当　中野　政詩

有名な1856年の Darcy の論文は2回にわたって行なった室内実験の報告である。第1回目の実験では，砂層下端を大気中に放置し上端に給水したときの浸透量と上端給水部の圧力を測定した。そうして，単位面積，単位長さ当りの浸透量と上端給水部の圧力の比が一定であり，その比の値は砂の粒径により異なることを指摘した。第2回目の実験では，浸透量と砂層上下端の給排水部の圧力を測定した。そうして，第1回目の実験から知ることの出来た法則性が流量と圧力勾配との間で一般的に成立することを述べた。この2回の実験から Darcy はこの法則性を

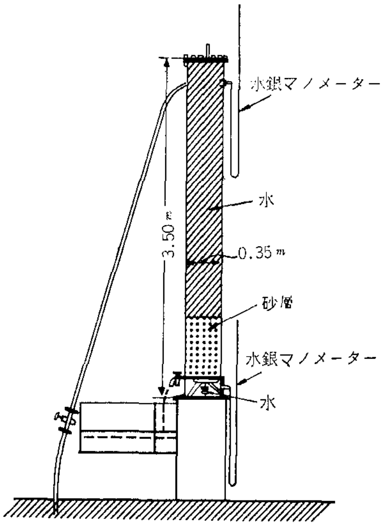
$$q=K\frac{S}{l}(h+l\pm h_0)$$

の形で整理した。

Darcy が浸透学の創始者であるということを考えてこの報告をみるとき，われわれは，色々な点に“なぜ



第1図 研 究 の 系 列



第2図　Darcy の実験装置

第1表　Darcy のデータ

実験番号	時間	1分間平均流量	平均圧力 フィルターの上	平均圧力 フィルターの下	圧力差	平均流量/圧力差	備考
		l	m	m	m		
1	15′	18.8	P＋ 9.48	P－ 3.60	13.08	1.44	マノメーター上部内に強いオシレーション
2	15′	18.3	〃 12.88	0	12.88	1.42	〃
3	10′	18.0	〃 9.80	－ 2.78	12.58	1.43	〃
4	10′	17.4	〃 12.87	＋ 0.46	12.41	1.40	弱い
5	20′	18.1	〃 12.80	＋ 0.49	12.35	1.47	かなり弱い
6	16′	14.9	〃 8.86	－ 0.83	9.69	1.54	殆んどなし
7	15′	12.1	〃 12.84	＋ 4.40	8.44	1.43	非常に強い
8	15′	9.8	〃 6.71	0	6.71	1.46	非常に弱い
9	20′	7.9	〃 12.81	7.30	5.78	1.37	非常に強い
10	20′	8.65	〃 5.58	0	5.58	1.55	殆んどなし
11	20′	4.5	〃 2.98	0	2.98	1.51	〃
12	20′	4.15	〃 12.86	9.88	2.98	1.39	かなり強い

字句はオシレーション発生について示した。

Darcy はそうしたか”という言葉を発せざるをえない。例えば，(1)圧力と流量を測定しているが，浸透の現象をつかもうとするとき，なぜこれらの量を測ろうとしたのか，又それらの量の比を計算しているが，(2)なぜ比を計算したのか。或いは，(3)なぜ Darcy はこういう研究をする気になったのだろうか。

論文を始めから追っていくことで，これらの“なぜ”に答えながら，Darcy における研究と技術との関連，浸透現象の構造の把握，思考様式を追求してみよう。

(3)に対する答えは簡単である。Darcy は Dijon 市の水道の上水道計画を担当していた。であったが故に Darcy には次のような技術的要請が課せられていたのである。“必要な水量を濾過するためにどのくらいの厚さの砂のフイルターが必要か”このために Darcy は透水テストをする気になったのである。同時に，Darcy が実験に際し流量に着目した理由も，これで理解することが出来る。流量測定の理由は又次の点からも理解出来る。

当時の水理学では，管の中の流れについて流速と圧力降下を測定し，抵抗係数を求めることが盛んにおこなわれていた。又 Poiseuille の実験も報告されていたのである。しかし，この方はむしろ，Darcy に圧力を測定させた理由と解した方がよい。圧力も，砂層上下端の給排水部の圧力の測定をしたことは，砂層の抵抗係数を測ろうと意図したと考えることが出来る。この抵抗係数という意識は又，流量と圧力差或いは圧力勾配との比を計算させせたと考えてよい。(2)及び(3)に対する答えは，Darcy における，技術的要請と当時の水理学の思考様式をみることで，このように与えられる。

では，始めに挙げた疑問とは別に，浸透現象の構造や砂層の特性については Darcy はどのように考えていたのであろうか。砂層の特性については，Darcy は粒径のみしか見ていなかった。つめ方をかえたりすることなしに，粒径を変えることだけで実験をしていることからこのことはうかがわれる。浸透現象の構造については，Darcy は何もふれていない。

それでは，(1-1) 式について，Darcy はどのように考えていたのだろうか。Darcy は報告の最後に，砂層の上端にタン水したとき，そのタン水深の時間的変化が(1-1)式によって計算出来ることを述べて，(1-1) 式が基本的に重要な法則性を表現しているのではないかと述べている。つまり Darcy は飽和流を支配する本質的な法則を実験的にとらえたと意識していた。しかし，現時点では，われわれは1節で少し触れたように Darcy 式を理解している（第7節参照）。この理解とここで述べたことと併せて，Darcy から現時点までの研究の発展の中で，Darcy 式，或いは Darcy の研究を位置づけるとき，Darcy の Darcy 式は飽和流という現象を定量的に記述したものであり，その意味も含めて Darcy の研究は現象論的な研究であったとみることは，Darcy に対して酷にすぎることではあるまい。

3. Darcy から Slichter まで*

執筆担当　田渕　俊雄

Darcy の法則が世に出た後の19世紀後半の約40年間は，土の中の水の飽和運動の初期の研究段階であり，多くの人々によって各種の研究がなされて，後の研究へのいくつかの萌芽がみうけられる。（第1図参照）

この期の人達の研究をその研究結果（特に運動方程式

* ここでは個々の論文が入手できなかったので，パブロフスキイ[9]，Forchheimer[10]，田町[11]等の文献をもとに調べた。

の形）から大別すると二つに分けられる。一つは運動方程式を実験的，理論的に追式する研究で，その中にはDarcy式とは違う形の運動方程式を取扱った研究もある。もう1つはDarcy式の中の透水係数の要因解析の研究である。またこれらとは別にDarcy式の技術的適用の研究もすでにおこなわれれていた。これについては別に報告するが，井戸の揚水量と地下水位の関係といった上水道・用水の分野でDarcy式の適用がおこなわれつつあった。このような当時の社会の上水道，井戸，地下水の分野からの要請が背景にあって砂層中の水の運動方程式とその抵抗係数（透水係数）の要因解析の研究が促進されたのではないかと想像される。

第2表　Darcy 式に関する19世紀後半の研究

Darcy	1856	$Q=KAJ$	実験式
Seelheim	1880	$Q=KA\tau J$	実験式，温度と粒経
Hazen	1892	$Q=KAde^2\tau J$	実験式，有効経 de
Slichter	1897-	$Q=KAde^2\frac{1}{Kn}\tau J$	半理論式，間ゲキ率，粒子間ゲキモデル，Poiseuille 式より
Dupuit	1857-	$Q=KAJ$	理論式，Prony式より，管モデル，径深
Smrecker	1878	$Q=KAJ^n$	実験式
Forchheimer	1901	$J=\alpha r+\beta r^2+\gamma r^3$	一般化

上述した2つの分類を表にしたのが**第2表**である。**第2表**の中の運動方程式の形は筆者がわかりやすくするためにDarcy式の表示法（流量表示）に変えて統一したものである。このような砂層中の水の流れの運動方程式の模索やDarcy式の検証の中から，次第にDarcy式の評価が固まっていくのであるが，次にそれらの研究を順を追って眺めてみよう。

一番最初に述べなければならないのはDupuitの研究である。彼はDarcyとほとんど同じ時期の研究者であり，Darcy式の地下水流動への適用者として有名である。それと共に彼は運動方程式の理論的誘導をおこなっており，おそらくこれが運動方程式の最初の誘導であろう。彼はProny（19世紀初期の水理技術者）の管路の中の水の運動方程式

$$J=\frac{\omega}{\chi}\alpha v'+\beta v'^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (3\text{-}1)$$

を使って次のように式を導いた。ω は管の断面積，χ は潤辺，α，β は定数，v' は管内の平均流速。上式の2次項を省略して

$$J=\frac{\chi}{\omega}\alpha v' \cdots\cdots\cdots\cdots (3\text{-}2)$$

土の中の間ゲキの断面積は間ゲキ率 n と全断面積 A をかけたものであるから，面積 A の土の断面を流れる流量 Q は

$$Q=nAv'=\frac{n}{\chi\alpha} \cdots\cdots\cdots\cdots (3\text{-}3)$$

見かけの流速 v は Q/A であるから

$$v=Q/A=\frac{n}{\alpha}\ \frac{\omega}{\chi}J=kJ \cdots\cdots\cdots\cdots (3\text{-}4)$$

こうしてDarcy式と同じ形（J と v が一次の関係）の式が導かれた。

すなわち彼は「管のモデル」「Pronyの式」を使っている。Pronyの式の2次項を省略してしまったので，結果はDarcy式の形になったがPoiseuilleの毛管流の式を使ったのとは大分意味が違うように思われる。彼が何故Poiseuilleの式を使わずに，Pronyの式を使ったのかは良くわからないが，Pronyの式には管の性質を表わすものとして毛管径でなく径深が入りこんでいる点からも察せられるように，円筒毛細管の式よりはこの方が実際の土の中の水の流れの式に近いと思ったのであろう。

したがって，後にKozenyがやはり径深を使った毛管流の式を土の中の運動方程式で変換しているが，それとは若干意味が違うように思われる。

次いでSmreckerは，Thiemの実験値から

$$J=31.2v^2+10.7v^{\frac{3}{2}} \cdots\cdots\cdots\cdots (3\text{-}5)$$

を導いてDarcy式に批判的な意見を述べた。

Seelheimは実験によって次式を立てた。

$$v=k_0\tau J \cdots\cdots\cdots\cdots (3\text{-}6)$$

τ は温度の関数で，k_0 は粒径と関係している定数で粒径の2乗に比例することを示している。したがって透水係数が関与する温度と粒径の2大要因が早くも取り上げられたことになる。

次いでHazenは温度と粒径の要因を入れて

$$v=Acd_e^2\frac{H}{l}(0.70+0.03T) \cdots\cdots\cdots\cdots (3\text{-}7)$$

の実験式を作った。A は尺度による係数でm/secの時に1，c は土の定数，d_e は有効径，H/l は動水勾配，T は摂氏の温度である。温度と粒径の要因を入れたことは新しいことではないが，粒径として有効径（10%粒径）なる新しい概念を導入して，実際の土でも直ぐに使えるようにした点が彼の功績であろう。

このようにSeelheimやHazen，さらにはDarcyにしろ，土の粒径，すなわち固体部分に着目して研究がおこなわれていたのであるが，次に間ゲキという土の中の水の通過する部分に着目した研究がSlichterによって始められるのである。（次節）

この間にKröberにより次式のようなDarcy式とは違う形の式が提案された。

$$v=173\left(\frac{d}{90}J\right)^{\frac{0.8+d}{0.8+2d}} \cdots\cdots\cdots\cdots (3\text{-}8)$$

またMasoniは動水勾配が大きい場合には，Darcy式

が成り立たないことを指摘した。

Forchheimer はこれらの非 Darcy 型の運動方程式を次のように一般化した。

$$J=\alpha v+\beta v^2+\gamma v^3 \quad \cdots\cdots(3\text{-}9)$$

しかし，これらの非 Darcy 型の式は微粒の砂の低流速域では実用上意味がなく，彼自身も粗粒の砂の場合以外では Darcy 式を運動方程式として用いている。

このように Darcy 式の実用性が高まるにつれ，Darcy 式の透水係数の要因解析の研究は理論面でも盛んになり，さらに Darcy 式の適用範囲の研究もおこなわれていく。

4. Slichter の研究　　執筆担当　八幡　敏雄

Hazen までの研究では土壌の中を流体が流れると云ってもその意味は未だ漠然としており，主な関心は何がその場合の浸透流量の因子なのかという点にあったようだ。こうして動水勾配，砂の粒径，水の温度，等々と浸透流量との間の関係がさかんに研究されたのである。

Slichter はこのような状況の中で流体が実際に通る通行路としての土壌間ゲキに着目し土壌における透水の問題をこの「間ゲキ通路内の流れ」の問題として取り上げた恐らく最初の人であった。

この分野に関する彼の業績は1899年に U. S. Geological Survey の年報として発刊された文献[2]に詳しいが，その緒言にはその研究の意図が次のように記されてあり，新らしい彼の着眼はこれからも汲み取ることができるのである。すなわち，(1)粒径がほぼ一様でしかも球状に近い形をした粒から成る土壌柱の中を水（その他の流体）が流れるとき，その流れをあらわす式を純理論的にみちびきたい，(2)そのためにまず完全な球形をなす粒体からなる模型土壌についてその間ゲキのことをしらべる，(3)さらに粒子の配列と間ゲキ率との間の関係をしらべる，(4)これらの因子を加えて従来の式を書き直し合理的なものにする，――これらが彼の研究のネライであった。

そこで彼はまず同大の球体を用いてその間ゲキの大きさや形状などの幾何学量をしらべた。そして規則正しい配列だけでも最密充塡から最疎充塡に至るまでに幾種類かのものがあって決して一通りではないことをみた後，それらの空間形状を幾何学的な量として把握するためにきわめて丹念な追求を試みたのである。この仕事は次の2つの点で porous media の飽和浸透流の解明に貢献した。(1)一様な細い円管について知られていた Poisseuille の法則

$$q=\frac{\pi d^4 p}{128\mu l} \qquad \text{(C. G. S.)} \qquad (4\text{-}1)$$

において，その毛管径 d のところに菱形をした間ゲキの平均的な直径を代入することによって Poiseuille の流れを，複雑な粒体の間ゲキについて，数量的に表現する道をとにかくひらいた (2)既にこの発表に先立つこと数年以前に A. Hazen によって conductivity の程度は粒径の自乗に比例することが知られており Slichter もそのことを知っていたが，同一粒を用いてもそのつめ方の如何によって間ゲキ率は 25.95% から 47.64% まで変化しうるのであり，そのため通路間ゲキの平均径は，粒径だけではきまらない。結局 conductivity の支配因子としては粒径の他に間ゲキ率も加えなければならないことを明らかにした。

彼はこの因子を $1/K$ とかき，結局

$$q=\frac{10.22\,pd^2A}{\mu lK} \qquad \text{(C. G. S.)} \qquad (4\text{-}2)$$

として浸透流量を表わした。ここで K は間ゲキ率から数表を使って求めるものであって，$1/K$ は間ゲキ率の凡そ 3.3 乗に相当している。

ただこの式で d は平均値ではなく単一値で，どの粒も皆同じく d なる直径の球であった。

彼が前記の論文の第1章の冒頭で述べている通り実地ではこのようなことは沖積作用を受けた砂地で近似的なものが稀に見られるだけであり，一般には各種の粒径のものの混合である。そこでこれを実際の技術に応用する場面では，この d に何等かの modification を施さなければならなかった。

1902年に彼は技術者向にやさしい地下水学の本[2]を著わしたが，そこでは結局この部分を Hazen のいわれる有効径 d_H におきかえている。まず模型土壌について知識を得，それに修正を加えることによって不均一粒子系にも適用できる式がえられる筈だとする Slichter の考え方からすればこの処置は別に不可解ではないのであるが，この置きかえは結局式の中の K の持つ意味をややスッキリしないものにすることとなった。何故なら d_H が考えられたとき，それは恐らく間ゲキ率も粒径分布もまちまちなものから帰納的に求められたものに相違ないから，この修正はせっかく誘導した式のそのかなり決定論的な性格を再び後退させたことになるのである。

Poiseuille の法則は，一様な円形断面の毛細管流については充分に信頼されているものであり，また断面が円形を外れても多少の修正によってその流量を正確に示しうるものであることは既に Slichter 以前に Boussinesq (1868) らによって明らかにされていた。しかし，これらは何れも1本の一様な細管についてのものである。多孔体の間ゲキの複雑な形状をしらべ，そこに Poiseuille 法

則の適用を試みたのはやはり Slichter が最初のようである。

5. Kozeny の研究について

執筆担当 矢橋 晨吾

1927年の報告[3]で Kozeny は Darcy 式を N-S 式から誘導し，その過程で Krüger の実験式

$$K=\frac{a}{S^2} \quad \cdots\cdots(5\text{-}1)$$

S：土粒子の表面積

を説明しようと試みた。要約すれば，*N-S* 式より，1)定常状態を考え，2)外力を 0 とし，3)連続条件を考慮すれば，

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)V_{\mathrm{p}}=\nabla^2 V_{\mathrm{p}}=-\frac{\gamma\cdot J}{\mu}=\mathrm{const} \quad \cdots\cdots(5\text{-}2)$$

γ：水の密度

μ：粘性係数

J：動水勾配

V_{p}：真の流速

$\xi=\frac{x}{\sqrt{f}}$，$\mu=\frac{y}{\sqrt{f}}$ とおいて変数変換し，その解を求めると，

$$V_{\mathrm{p}}=-\frac{\gamma\cdot J\cdot f}{\mu}\cdot F\left(\frac{x}{\sqrt{f}},\ \frac{y}{\sqrt{f}}\right) \quad \cdots\cdots(5\text{-}3)$$

F は間ゲキの境界では 0 にならねばならないから $V_{\mathrm{p}}=0$，また

$$F\left(\frac{x}{\sqrt{f}},\ \frac{y}{\sqrt{f}}\right)=-\frac{x^2+y^2}{4f}+\sum_{n=1}^{n=\infty} a_{\mathrm{n}}\cdot\phi_{\mathrm{n}}(x+iy) \quad \cdots\cdots(5\text{-}4)$$

ϕ：調和函数の記号，上の条件から境界では

$$F\left(\frac{x}{\sqrt{f}},\ \frac{y}{\sqrt{f}}\right)=0 \quad \cdots\cdots(5\text{-}4a)$$

又は $\frac{x^2+y^2}{4f}=\sum_{n=1}^{n=\infty} a_{\mathrm{n}}\cdot\phi_{\mathrm{n}}(x+iy)$ $\cdots\cdots(5\text{-}4b)$

極座標を導入し

$$x^2+y^2=r^2,\quad x+iy=r\cdot ei\varphi$$

境界の点では，$r=\rho$ とおいて

$$\frac{\rho^2}{4f}=\sum_{n=1}^{n=\infty} a_{\mathrm{n}}\cdot\phi(\rho\cdot ei\varphi) \quad \cdots\cdots(5\text{-}4c)$$

土粒の全間ゲキを 1 本の毛細管と仮定し，その円周を (u)，半径を (ρ_{m}) とすると，(5-4)式は

$$F\left(\frac{r\cos\varphi}{\sqrt{f}},\ \frac{r\sin\varphi}{\sqrt{f}}\right)=-\frac{r^2}{4f}+\sum_1^{\infty}a_{\mathrm{n}}\cdot\phi_{\mathrm{n}}(rei\varphi)$$
$$=\frac{\rho m^2}{4f}\left(\sum_1^{\infty}a_{\mathrm{n}}\cdot\phi_{\mathrm{n}}(r\cdot ei\varphi)\cdot\frac{4f}{\rho n^2}-\frac{r^2}{\rho m^2}\right)$$
$$=\frac{u^2}{16r^2f}\left(\sum_1^{\infty}a_{\mathrm{n}}\cdot\phi_{\mathrm{n}}(r\cdot ei\varphi)\cdot\frac{4f}{\rho m^2}-\frac{r^2}{\rho m^2}\right)$$
$$=\frac{\mathrm{u}^2}{16r^2\cdot f}\cdot A \quad \cdots\cdots(5\text{-}5)$$

f：毛細管の断面積

となる。平均間ゲキ流速は

$$v_{\mathrm{p}}=\frac{r\cdot J\cdot f}{\mu}\cdot\frac{1}{16\pi^2}\cdot\frac{\mathrm{u}^2}{f}\cdot\frac{\iint A\cdot r\cdot dr\cdot d\rho}{\iint r\cdot dr\cdot d\rho} \quad \cdots\cdots(5\text{-}6)$$

A の平均値は $A_{\mathrm{m}}\simeq\frac{16\pi^2}{u^4}\cdot c_1\cdot f^2$ としてよいから

$$v_{\mathrm{p}}=\frac{r\cdot J\cdot f}{\mu}\cdot c_1\cdot\frac{f}{u^2} \quad \cdots\cdots(5\text{-}7)$$

間ゲキ率 $\left(\frac{f}{F}=p,\ F\text{：土の全断面積}\right)$ 及び径深 $\left(\frac{f}{u}\right)$ を考えて，(5-7)式を変形すれば，断面積 F の土の流管内の平均流速 v は

$$v=\frac{\gamma\cdot J}{\mu}\cdot c_1\cdot\left(\frac{f}{u}\right)^2\cdot\frac{f}{F} \quad \cdots\cdots(5\text{-}8)$$

ここで，長さ 1 の流管を考えると $\frac{f}{F}=p$ だから

$$\frac{f}{u}=\frac{f\cdot 1\cdot F}{u\cdot 1\cdot F}=\frac{p}{u\cdot 1}\cdot V=\frac{P}{S}\cdot V \quad \cdots\cdots(5\text{-}9)$$

V：土の全体積

球形粒子では，次式が成り立つ。

$$\frac{n\cdot\pi\cdot dw^3}{6}=(1-P)\cdot V \quad \cdots\cdots(5\text{-}10)$$

n ＝粒子の数

dw＝土の粒径

$$n\cdot\pi dw^2=S \quad \cdots\cdots(5\text{-}11)$$

(5-9)，(5-10)，(5-11)式より

$$\frac{f}{u}=p\frac{V}{S}=\frac{pdw}{6(1-p)} \quad \cdots\cdots(5\text{-}12)$$

従って，

$$v=\frac{\gamma}{\mu}\cdot c_1\cdot\frac{p^3}{(1-p)^2}\cdot dw^2\cdot J \quad \cdots\cdots(5\text{-}13)$$

Kozeny は(5-13)式の誘導過程で，Darcy 式を N-S 式から導いたことは注目に値する。

径深と porosity と流速とを関係づけるという意図はわかる。しかし演算上にあいまいさがある。例えば，(5-3) 式を導くために $(\sqrt{f})$ を入れた変数変換の物理的意味が不明であったり，極座標を使うことの意味も十分に説明されていない。又，彼はモデルを 3 つ使った。

第 1 のモデルは，N-S式を解く際に使った潤辺を保存した 1 本の毛細管モデルである。第 2 のモデルはその径深の検証に使った n 本の毛細管のモデルである。

第3のモデルは粒径，比表面，porosity を導くために使った理想土壌モデルである。

これらのモデルの使い方は多分に，便宜的であり，一貫性がない。しかし N-S 式から導くという考え方をここにみることは興味深いことである。Poiseuille 式から変形するよりはむしろ，手法的には妥当性があるようにみえるからである。又，モデルの考え方，使い方について，我々に多くのことを教えてくれる点は好ましいところである。

彼は上記の弱点を Zunker に指摘されたために 1932 年，新しい式を誘導した。[4] 要約すると，流れる水の単位体積当りの流動抵抗 (W) はこれを動かす力 (P) に等しいから

$$W=P=\gamma\cdot g\cdot\frac{H}{L}=\gamma\cdot g\cdot J \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5\text{-}14)$$

γ：水の密度，g：重力の加速度。

この流動抵抗は次元解析により

$$W=c\cdot\eta\cdot v'\cdot O_1{}^2=c\cdot\eta\cdot\frac{v}{p^3}\cdot\frac{O^2}{V_b{}^2}\cdots\cdots (5\text{-}15)$$

c：粒形による値，V_b：全体積，O_1：水の単位体積当りの土粒表面積，O：浸透管内の砂粒の全表面積。

更に分散度 (U) なる factor

$$\mathrm{U}=\frac{\text{粒子表面積}}{\text{粒子実体積}}=\frac{O}{V_b(1-p)}\cdots\cdots\cdots (5\text{-}16)$$

を導入して，(5-14)，(5-15)，(5-16)式を組合せると，

$$W=c\cdot\eta\cdot v\cdot\mathrm{U}^2\frac{(1-p)^2}{p^3}=r\cdot g\cdot J \cdots\cdots (5\text{-}17)$$

となる。Darcy 式 $v=\dfrac{Q}{F}=k\cdot J$ から $k=\dfrac{v}{J}$ を考慮して，

$$k=\frac{v}{J}=\frac{\gamma\cdot g}{c\cdot\eta\cdot\mathrm{U}^2}\cdot\frac{p^3}{(1-p)^2}\cdots\cdots\cdots (5\text{-}18)$$

ただし，粘土の場合には

$$k=\frac{\gamma\cdot g}{c\cdot\eta\cdot\mathrm{U}^2}\ \frac{(p-p_1)^3}{(1-p)^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5\text{-}19)$$

ここで，$p_1=\dfrac{nW_h}{100}(1-p)\cdot\gamma\cdot g \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5\text{-}20)$

p_1：水の流動による間ゲキ損失，W_h：吸着率。

こうして Kozeny は1927年の時に比較して，かなりすっきりした誘導をおこなうことができたのである。

このように径深を使うことによって，粒子の粒径や形の変化に対応した式を作り上げることができ，理想土壌という限定つきであった Slichter の式を一歩前進させたのである。そして Carman 等によっていろいろと補足説明されて広く用いられるようになった。

又，Zunker との論争は田町氏[4]によって紹介されていて有名である。

6. Baver, Purcell らの研究について

執筆担当　矢橋　晨吾

Kozeny は粒子系を考えて径深と透水係数を関係づけた。しかしこの factor のみでは粒径のあらゆる範囲で透水性を正しく表わすことが困難であることがその後の研究でわかり，この時代の研究者は間ゲキ量とともに，個々の間ゲキの大きさを追求するようになった。いわゆる多孔系における，Baver,[5] Purcell,[6] Childs, Collis George, Marshall 及び Millington and Quirk らの吸引曲線にもとづく毛管径と透水係数に関する研究がここから始められるのである。

まず Baver は透水性は全間ゲキに対する大間ゲキの割合によって支配されると考えた。そして間ゲキと吸引圧との関係を求め，浸透に関与する大間ゲキに相当する吸引圧を限界吸引圧として，これと浸透を結びつけた。Nelson, Baver はこの考え方を実験で確かめた結果，40cm吸引圧までに排水される間ゲキ量が透水性と最も関係あることを見つけた。

又，Smith, Browning, Pohlson は間ゲキ径を3つに大別し，間ゲキ量係数と透水性の関係を求めた。Lutz, Leamer は 0.10mm以上の間ゲキ分布と透水性との関係について実験をし，各種土壌の透水係数と間ゲキ量の比較をした。

以上の諸研究は大間ゲキの量と透水係数との関係である。つまり間ゲキ分布ではなく，量そのものとの関係でとらえたものである。

分布との関係でとらえたものには Purcell のものがある。

Purcell は実際の間ゲキ分布をもとにし，実験係数(F)を入れた1つの透水係数算出の理論式を示した。すなわち，すべての毛管は円形で独立し，その半径に応じて流体が流れるという仮定にたち，Poiseuille 式と Darcy 式より

$$K=0.66F\varepsilon\int_{\rho=0}^{\rho=100}\frac{d\rho}{(P_c)^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6\text{-}1)$$

K：透水係数，ε：間ゲキ率，P_c：毛管圧，ρ：水分量，を導いた。P_c の単位を気圧より cm，K の単位をタルシー単位より cm^2 にしたものが次の式である。

$$K=7\times10^{-3}F\varepsilon\int_{c=0}^{c=\varepsilon}h^{-2}dc \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6\text{-}2)$$

h：吸引圧(cm)

ここで(F)は実験係数で，低い透水性のものについては 0.07，高いものについては 0.36 という値を示している。

Wyllie, Spangler も Purcell と同じような式を用いたが，Purcell の実験係数 (F) の中に tortuosity の項を入れて考えた点がちがっている。

この他に，Childs, Collis George, Marshall らの間ゲキの分布とそのつながり方を考えて，透水係数を求めようとする試みがあるが，これについては，後日，不飽和への発展のところで述べることにする。

これらは毛管モデルに徹していて，それなりにきわめてすっきりしている。ところで吸引法によって測定する場合，測定値を支配するものは，ある方向に向った間ゲキの最も細くなった部分とその量であって，実際の間ゲキ及び分布を正しく理解することができない。又，Purcell の研究では計算値と測定値の間に実験係数を使わねばならない点に問題があり，全体的にみて，間ゲキの形と構造についてはふれていない。

この点については，最近新しく研究がおこなわれてきている。

(Darcy に始まる飽和流の研究（そのII）は次に報告する。)

引用文献

1) Darcy, H.: Les fontaines publique de la vile de dijon, Victor Dalmont, Paris. (1856).

2) Slichter, C. S.: Theoretical investigation of the motion of ground waters, U. S. Geol. Survey, 19th. Anu. Rep. (1898).
　―――: The motion of underground waters. (1902).

3) Kozeny, J.: Uber Grundwasserbewegung, Wasserkraft u. Wasserwirtshaft, 22 Jahrg, Heft 5. (1927).

4) ―――: Die Durchlassig des Bodens, Der Kulturtechniker, 35 Jahrg, Heft 6. (1932).

5) Baber, L. D.: Soil permeability in relation to non-capillary porosity, Soil, Sci, Soc. Amr. Proc. 3 (1938).

6) Purcell, W. R.: Capillary pressures, Trans, Amr. Inst. M. E, 186. (1949).

7) Blake, F. C.: The resistance of packing to fluid flow, Trans. Amr. Inst. Chem. Engrs, 14. (1922).

8) Donat, J.: Das Gefuge des Bodens und dessen Kennzeichnung, Trans. Intern. Congr. Soil, Sci. 6th congr. Paris B (1937).

9) パブロフスキー：Собрание сочиненииII (1956).

10) Forchheimer. P.: Hydraulik, B. G. Teubner, Leipzig. (1930).

11) 川町正誉：土壌と水との関係・特に毛管現象及び浸透について，農土研，3 (1931).
　―――：土壌の浸透係数に関する Zunker 氏と Kozeny 氏との論争について，農土研，5 (1933).

12) Carman, P. C.: Flow of gases through porous media, (1956). P. 8～13.

13) Marshall, T. J.: Relations between water and Soil, C.A.B. (1959).

14) Scheideger, A. E.: The physics of flow through porous media, Univ. Tront press. (1957).

（付）土壌水運動理論の諸系列（I）の正誤表
（土壌の物理性12号）

	誤	正
P 56 1行目及び 3行目	R. A. Richards	L. A. Richards
P 59 23行目 〃	2ℓ の厚さを持つ 置いたとき平板	削　除 置いたときの平板

会　告

第8回　シンポジウムのお知らせ

土壌物理研究会総会および研究討論会

日　時　昭和41年11月18日（金）9時より

場　所　東京農業大学
（世田ケ谷区世田ケ谷4の461　小田急線経堂駅下車徒歩，または渋谷からバス）

テーマ　水田の物理性と水稲生育

	講演者
(1) 土壌断面を中心として	日本鋼管KK. 岡本春雄　農技研　滝島康夫
(2) 透水を中心として	新潟農試　丸田　勇　東京農工大　石原　邦
(3) 耕うんを中心として	関東東山農試　出井嘉光　東教大農　山沢新吾