土壌水運動理論の諸系列（3）

――その内容と評価――

Ⅲ Darcy に始まる飽和流の研究（その II）

浸透理論体系化研究グループ

7. 土壌水運動方程式の誘導*

執筆担当　東大農　中村良太

1）はじめに

飽和流について成立つ Darcy の法則は理論式ではなく，あくまである条件（例えば低流速）のもとでのみ成立する実験則であった。それで Darcy の法則の発見以来，より一般の場合（例えば高速流の場合などを含む）に成立つ浸透流の運動方程式を求めようとする目的，あるいは粘性流体について一般的に成立する運動方程式である N.S 式から Darcy の法則を理論的に誘導しようとする目的での研究が行なわれるようになった。

前報で取扱った研究もこれらの目的にそったものであるが，我々はここで，例えば Slichter などのような球群モデルや毛細管モデルといったような具象的なモデルを使ったりあるいは実験によることなしに，数理的な方法のみによってこれらの目的を達成しようとする一連の研究を分類することが出来る。

このような研究についてここで扱うが，これについて論じる際に最も重要な概念としてミクロの場とマクロの場の概念がある。

飽和した土壌中の水の流れを考えるに当って，流れを顕微鏡的に細かく一つ一つの間ゲキの中まで見れば，そこには土壌粒子によって各所で急激に変化させられた間ゲキ内での極めて複雑な流れがある。

しかし一歩はなれて我々の目でダムの堤体内の浸透流の流線を見たり，またその透水係数を測定しようとしたりすると，そこでは極めて単純な法則（例えば Darcy の法則）で表わされる単純で滑らかな流れがある。

前のように顕微鏡的な立場で見たときの流れをミクロの場での流れと呼び，後のように一歩はなれた立場で見たときの流れをマクロな場での流れと呼ぶのである。

これから見れば，粘性流体について一般の場合に成立する運動方程式である N.S 式はミクロの場での一つ一つの間ゲキの中の流体部分について成立っていると考えられるのに反し，Darcy の法則始め，我々が浸透流の方程式として考えるものはマクロの場での式である。

従って一般的に成立つミクロの場での方程式から，マクロの場での方程式を導き出すことが出来れば，上記の目的は達成出来るというのがこれら研究に共通した基本的な考え方である。

しかし，ミクロの場の間ゲキで成立する N.S 式を普通に流体部分のみについて積分してマクロの運動方程式を導く方法は，境界の形が余りにも複雑であるために不可能である。その上，ミクロからマクロに移り変るその過程において流体，土の粒子，空気の混在によって各所で物理量があったりなかったりという場の中での微分を考えなければならない所にも大きな困難が存在する。

これらの困難を克服するためにここで扱う各研究においてもいろいろの方法がとられているが，その主なものは次のようである。その第一は，マクロでの浸透水の動きと同じ動きをする仮想的な連続流体を考えてこれについて方程式を立てる方法，第二は Darcy の法則はマクロでの粘性抵抗についての法則であると解釈し，これにマクロでの慣性項を付加して一般の運動方程式を作る方法，第三はミクロの N.S 式をもととして次元解析的にマクロの方程式を求める方法，第四は一様流中の球の抵抗についての Stokes や Oseen の近似解からの類推によってマクロの抵抗を求め，方程式を作る方法，などである。

これを研究の歴史と比較してみると，恐らくこの種の研究の最初はパブロフスキーの研究[1]であろう。パブロフスキーは1900年代の初期に第一の仮想流体を用いる方法を用いた。日本でも後年中村[6]がパブロフスキーとは全く独立に同じような方法での研究を行なっている。日本での始めてのこの種の研究は1930年に本間[2]が第二の

* この原稿は，田淵俊雄（東大農），中野政詩（東大農），矢橋晨吾（教大農），八幡敏雄（東大農）の討論の結果を中村がとりまとめたものである。

方法によって行なった。そしてこれはN.S式を平均するという立場をとる高木[4]にも受継がれている。その後村本[8]は中村の方法と高木の方法の両方の影響のもとにやはりN.S式を平均する立場から，マクロの場が，ミクロの場から独立した物理系をなすことを主張した。この間に第三の次元解析的方法をとるものとしてHubert[3]，Irmay[7]の研究，第四のStokes, Oseen近似を用いる方法に沢田[5]の研究があった。最後に吉田[9]はN.S式でなく，直接に運動量の保存則から出発してOseenの近似を考え併せる方法を用いたが，これは岡本[10]が受継いで高速流及び不飽和流に発展させている。

以下，これらの研究の中のいくつかについて述べることにするが，その際，Darcyの法則に対する立場が二通りあることに注意する必要がある。

その第一の立場は，Darcyの法則は流体に与えられる抵抗力に関する法則である。即ち，単なる抵抗則であって運動方程式にまではなっていないとするものである。

第二の立場は，Darcyの法則は，抵抗力のみではなく，他の慣性力についての関係も含んでいるものであり，従ってこれはもう運動方程式にまでなっているのだとするものである。

研究によっては，このどちらの立場をとっているのか必ずしも明確でないものもあるが，第一の立場をとるものは，この抵抗力の項に慣性項を考え合せて一般的な運動方程式を導き出そうとする姿勢をとるし，第二の立場の研究は，このDarcyの法則をミクロでのN.S式から導き出して来るその筋道を理論的に明らかにしようとする点に目的がおかれる傾向がある。

以下，特に説明のあるもの以外は記号を共通に

u：ミクロでの実流速，ベクトルで考えるときには $\boldsymbol{u}$ と記し，その x, y, z，成分を各々 u, v, w，と記す。

U：マクロでの流量流速，ベクトルで考えるときには $\boldsymbol{U}$ と記し，その x, y, z，成分を各々 U, V, W とする。

λ：間ゲキ率

d：粒径

p：ミクロでの圧力，P：マクロでの圧力，

K：単位体積の流体に働く外力

$h=z+\dfrac{p}{\gamma}$　：　$E=z+\dfrac{p}{\gamma}+\dfrac{u^2}{2g}$

n：土壌粒子表面の法線ヴェクトル

s：土壌粒子表面の面積

ρ：流体の密度

とする。

2）パブロフスキーの研究[1]

この種の研究でここで取上げるもののうち，一番古いのはおそらくパブロフスキーの研究と思われる。現在我々が入手している文献[1]は，1962年に出版された選集であるが，それによるとおそらく1962年代初期と推定される。

パブロフスキーは，マクロな場での流れは，次のような性質を有する仮想的な流体（これを特殊流体と呼ぶ）の流れと考えられるとした。その性質とは，1. 連続体である。2. 重力の影響を受ける。3. $F_m=-\dfrac{gu}{k}$ で表わされる制動力を受ける。4. 粒子の骨格の影響は考えない。5. せん断応力は働かない。6. 速度は流量流速で考え，圧力は間ゲキ中の圧力そのものとする。7. 密度，圧縮性も間ゲキの中の流体のものと同じである。

ここでは，poreとか粒子とかはもう考えなくなっているが，それは場の変換に相当する，また，3. については，抵抗力は流速の一乗に比例していることであり，その根拠はDarcyの法則である。

そして，この流体の中に無限小の閉曲面を考えて，そこにダランベールの法則を適用し，

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\lambda}{\rho}\frac{\partial\theta}{\partial x}-\frac{gu}{k}\\ \frac{d^2y}{dt^2}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\lambda}{\rho}\frac{\partial\theta}{\partial y}-\frac{gv}{k}\\ \frac{d^2z}{dt^2}&=g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\lambda}{\rho}\frac{\partial\theta}{\partial z}-\frac{gw}{k} \end{aligned}\right.$$

但し　$\theta=\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}$

というマクロの運動方程式を導いた。

しかし，最初の特殊流体を考える経過は直感的なものであり，ミクロの場で成立するN.S式を平均したり積分したりした結果のものではないし，抵抗力の項については実験法則であるDarcyの法則をそのまま用いたのみであり，その内容にまで立入った考察は行なわれない。しかし，抵抗則としてDarcyの法則を用いた点，場の変換を用いた点など，後の諸研究で扱われたことが既に含まれていた点は重要である。

3）本間の研究

1930年の論文[2]で，本間は次の如く考えた。

鉛直上向きのZ軸を持つ直交座標系を考え，各軸方向の地下水流の速度成分を u, v, w，とすれば，地下水流については流速が小さく，N.S式において慣性項の中の $u\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$v\dfrac{\partial v}{\partial y}$，$w\dfrac{\partial w}{\partial z}$，等の項が無視できるので，

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\nabla^2 u,\qquad \rho\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial y}\mu\nabla^2 v,$$

$$\rho\frac{\partial w}{\partial t}=-\rho g-\frac{\partial w}{\partial z}+\mu\nabla^2 w\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (1)$$

となる。

これらの式の右辺の最後の項は粘性による抵抗を表わすものである。定常の場合には (1) 式が Darcy の法則と一致することから，この項は次のように書ける。

$$\mu\nabla^2 u=-\frac{pg}{k}u,\ \ \mu\nabla^2 v=-\frac{pg}{k}v,\ \mu\nabla^2 w=-\frac{\rho g}{k}w$$

これらが近似的に非定常にも成立するとして (1) に代入すると，

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\rho g}{k}u,\quad \rho\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\rho g}{k}v,$$

$$\rho\frac{\partial w}{\partial t}=-\rho g-\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\rho g}{k}w,$$

となるがこれが地下水の基本運動方程式である。

以上が本間の考え方の要旨である。

本間の研究では，粘性項を見つけるのに Darcy の法則を応用して一般的な運動方程式を導びこうとする立場は明確であるし，N．S 式の粘性抵抗の項を Darcy の法則によって置き換えている点も簡単である。がミクロとマクロの場の違いについて，流速その他いろいろの点についてもこの段階ではまだ明らかに分離して考えられてはいない。

本間の研究は日本で最初のこの種の研究である点に意義があり，その後の高木，中村等の研究に影響を与えた。

4） 高木の研究[4)]

高木は Darcy の法則の単なる三次元への拡張という従来の地下水の運動方程式に非定常の場合を含ませることを目的として，N．S 式をマクロに見た流線に直交する平面内で平均することにより，運動方程式を導びこうとした。

平面は，ある程度以上大きく取れば，その中に十分に多数の粒子が含まれるので，どう取ってもその中の物理量の平均値はある一定の値をとるが，あまり小さく取ると，その取り方によって平均値がバラツクようになる。このようなことから，均一度を定める最小の面積として $\bar{f}$ を定義し，その中で N．S 式を平均した。これはミクロとマクロの境界となるスケールについての概念を提案したこととして，意義がある。

まず，高木は N．S 式を

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+\boldsymbol{u}\nabla\boldsymbol{u}=X-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\Delta\boldsymbol{u}+\frac{\nu}{3}\mathrm{grad\ div}\ \boldsymbol{u}$$

とおき，左辺第二項は二次の微小量であるから省略する。粘性項はガウスの定理その他を用いて変形し，

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}=\boldsymbol{K}-\mathrm{grad}\frac{\boldsymbol{P}}{\rho}+\frac{\nu}{\lambda}\Delta U-\nu\int\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{n}}ds$$

をマクロな運動方程式として導いた。

高木は，N．S 式を平面で平均した所が unique である。計算については粗い面があるとしても，粘性項として，$\int\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{n}}ds$ を出したことは，間ゲキ内での速度分布を考えるようになったこととして観念的には肯定出来よう。しかしこれはミクロな場での量であり，そこを彼は単に $\frac{c}{k}U$ とおくことによってマクロに変換しているが，これは Darcy の法則を抵抗則として使用していることで，これは結果としては本間と同じである。

5） 中村の研究[6)]

中村は本間及び Oseen 近似を用いた沢田の考え方を批判して，パブロフスキーとは類似しているが全く独立に，次の如く考えた。

即ち，マクロでの流れは，ある特殊な性質を持った仮空の連続流体の流れと考えられるとして，まず直感的にマクロの流れの方程式を予想し，これに従って流れる流体を仮定しこれを M 流体（Macroscopic Imaginary Fluid）と呼んだ。

このM流体には，方向はマクロな流れと逆向きの方向を持ち大きさは流速Uの関数である抵抗力 $\phi\left(\frac{U}{\lambda}\right)$ が働くが，それ以外の点では一般の粘性流体と全く同じ性質があるものとする。

ここで，M流体の密度を ρ_m，流速を V_m とすると

$$\rho_m=\lambda p\qquad V_m=\frac{1}{\lambda}U$$

である。

そしてこのM流体中に体積 V の閉曲面 S を考え，外力をKとしてダランベールの法則より

$$\int_V\left(K-\frac{DV_m}{Dt}\right)\rho_m dV-\int_V\phi dV+\int_S p_m n dS=0$$

とおきこれから，マクロの運動方程式として

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\boldsymbol{DU}}{\boldsymbol{Dt}}=-\mathrm{grad}\ h-\frac{\mu}{k''\rho}\boldsymbol{U}$$

を導いた。この過程の中では，見掛けの粘性抵抗を省略した点，及び抵抗力としては $\phi\left(\frac{U}{\lambda}\right)$ を $a\frac{U}{\lambda}+b\left(\frac{U}{\lambda}\right)^2+c\left(\frac{U}{\lambda}\right)+\cdots\cdots$ と級数展開した第一項までを取った場合として $a\frac{U}{\lambda}$ の形においた点が注目される。

中村はこのM流体を媒介としてミクロからマクロへの変換系を求めたことになるが，しかしこの変換の求め方はやや観念的で，慣性項の内容などについても細かな説明はない。中村の研究はミクロの場とマクロの場は性質が違うことをよりはっきりとさせた点に特色があり，こ

の点は村本に引継がれて更に整理される。

中村の研究をパブロフスキーのものと比較すると，類似の点が多いが，見掛けの粘性項を省略した点と，パブロフスキーが抵抗則として Darcy の法則をそのまま用いたのに対して，$\phi\left(\frac{U}{\lambda}\right)$ を $\frac{U}{\lambda}$ のベキ級数で展開しその二乗の項以下を省略した場合として流速の一乗に比例する抵抗力の項を用いた点が大きく異っている。

6) Irmay の研究[7]

Irmay は次のような三次元領域で，N. S 式を平均することを試みた。

その領域とは，均質さが保証されるように十分に多数の土壌粒子を含み，しかもその中ではマクロな諸量の変化は無視し得る程に小さいよう，十分に小さな領域である。

そして，マクロの流れの方向を x 軸に取るとき，この領域の中での平均を考えると，

$\overline{v}$, $\overline{w}$, $\overline{uv}$, $\overline{uw}$, $\overline{uv_y}$, $\overline{uw_z}$, $\overline{u_{xx}}$, $\overline{(u^2)_x}$, が全くゼロになるとして，N. S 式を変形し，

$$gE_x=\frac{1}{2}\overline{(v^2+w^2)}_x+\nu(\overline{u_{yy}+u_{zz}})-\overline{u_t}\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

とした。（上に引いた横線は上述の領域内での平均を表わし，添字はそれによる偏微分を表わす。）

次に L が，二粒子間の間隙の平均距離であるとすると

$$\overline{u_{yy}+u_{zz}}=-\beta\frac{\overline{u}}{L^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

とおくことが出来る。

これに $\quad \lambda=\frac{L}{L+d} \quad$ 及び $\quad U=\lambda\overline{u}$

を代入すると

$$\overline{u_{yy}}+\overline{u_{zz}}=-\beta\frac{(1-\lambda)^2}{\lambda^3}\frac{1}{d^2}U$$

と表わされる。

また，高速になると流れの拡大部で separation が起るので，結局 $\overline{(v^2+w^2)_x}<0$ となると考えた。

そして，上と同様にして

$$\overline{(v^2+w^2)_x}=-\alpha\frac{(1-\lambda)}{\lambda^3}\frac{U^2}{d}$$

とおいた。

そして，以上を（1）に代入して，マクロの運動方程式を J を動水コウ配として

$$J=\beta\frac{(1-\lambda)^2}{\lambda^3}\frac{\nu}{gd^2}U+\alpha\frac{1-\lambda}{\lambda^3}\frac{1}{gd}U^2+\frac{1}{\lambda g}\frac{\partial U}{\partial t}$$

と求めた。

Irmay の研究は，この項で扱っている諸研究の中では透水係数の内容については最も細かに求められている点に特徴がある。しかし，粒子間の平均距離 L を考えて (2) の式のようにおいてしまったことは，次元解析的であって結局，真直な，同じ太さの毛細管を考えたことと同じであり，結果も Kozeny の結果と類似している。

7) 吉田の研究[9]

吉田は出来上った N. S 式の平均化という立場でなく N. S 式を導き出す基本となった運動量保存の方程式にまでさかのぼって，そこからマクロへの変換を行なった。

即ち，porous media の中で，マクロに対して適当に微小な体積 V の部分について，運動量の実質単位時間増加率は，その流体に働く合力（体積力と流体境界面に働く応力）に等しいとして

$$\frac{d}{dt}\int_{Vt}\rho\boldsymbol{u}dV=\int_{Vt}\boldsymbol{K}dV+\int_{S}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T}ds$$

但し，T は応力テンソル

と運動方程式を立てた。

そしてこれから，粒子の存在する所だけ穴のあいているような，そんな形の空間領域についてもガウスの定理が用いられる点を利用して変換を行ない，

慣性項を $\quad \int_{(V)}\rho\lambda\left\{\frac{\partial\overline{\boldsymbol{u}}}{\partial t}+(\overline{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla)\overline{\boldsymbol{u}}\right\}dV$

外力項を $\quad \int_{(V)}\boldsymbol{K}\lambda\, dV$

応力項を $\quad \int_{(S)}(\mu\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{n}}-\boldsymbol{n}p_d)\,ds$

但し p_d は動圧，$\overline{u}$ は $\overline{u}=\frac{U}{\lambda}$ とおかれたマクロの量と導いた。ここで応力項のみはマクロの量でなくまだミクロの量で表わされていることに注意が必要である。

吉田の研究は，出来上った N. S 式に固執しなかった点と更に穴あき領域での積分をガウスの定理で解決した点によって，特に慣性項の誘導に大きな進歩が見られ，応力項についても圧力項の分離という面で進歩が見られた。しかし，上述のようにこの応力項のマクロの量への変換は完成されず単に Oseen 近似解からの類推で単位体積流体に働く抵抗力 D を

$$D=-\left(\frac{\mu}{k}+\rho a\frac{|\boldsymbol{U}|}{\lambda}\right)\frac{\boldsymbol{U}}{\lambda} \qquad (a：定数)$$

とおかれるに止っている。

なお，岡本はこの吉田の研究を更に高速流，不飽和流へと発展させている[10]

8) おわりに

以上の諸研究を見ると，最初直感的あるいは次元解析的に粗く考えられていたミクロからマクロへの方程式の変換が段々と具体的に積分したり平均したりされて変換が行なわれるようになって来たことが分る。

そしてこの過程を通じて，一般の浸透流の運動方程式

を作る目的あるいはN．S式からDarcyの法則を誘導する目的のいずれによらず，ミクロとマクロの概念や運動方程式の各項についての概念がはっきりして来たことは，これらの研究による成果である。しかし，多くの場合浸透流で最も支配的な力は粘性による抵抗力であることが知られているが，この粘性項についてはマクロへの変換が全く未完成である点は問題である。あるいはこの変換を行なうためにはまた毛細管モデルや球群モデルが必要になって来るかもしれない。これらの事実をどう評価するかは研究の立場なり目的なりによって異ってくるべきものであり，今後の研究にとってもやはりこの点の明確な考慮は必要であると思われる。

引用文献

1) パブロフスキー：Собрание сочинении II（1965）
2) 本間仁：地下水流の理論に関する新方法，土木学会誌V. 21, No. 7, p. 961～（1935）
3) Hubbert, M. K.: Darcy's law and the field equations of the flow of underground fluids, A.I.M.E. Petroleum Trans. V 207, p. 222～（1956）
4) 高木俊介：土壌水の運動機構について，応用物理，V. 17, No. 8, p. 241～（1948）
5) 沢田敏雄：浸透水の流動に関する研究，農土研，V. 17, No. 2, p. 57～（1950）
6) 中村充：浸透水運動の基礎理論，農土研，V. 24, No. 1, p. 40～, No. 4, p. 218～; V. 25, No. 2, p. 117～, No. 6, p. 365～（1955）
7) Irmy, S.: On the theoretical derivation of darcy and forchheimer formulas, Trans. A.G.U. V. 39, p. 702～（1958）
8) 村本圭一：Darcy 流体論，修論または，研究の資料と記録　第10集（1960）
9) 吉田昭治：浸透流の基礎方程式，農土研，別冊 No. 1, p. 19～（1960）; No. 5, p. 1（1963）
吉田昭治：浸透流の基礎的研究，山形大学紀要（農学）V. 5 No. 3, p. 27～（1968）
10) 岡本雅美：porous media を通る流れの特性，土壌の物理性の研究，No. 3（1966）