土壌の物理性　第68号　p. 3～14 (1993)

報　文

浸透水貯留による地下水位上昇を考慮した土中水移動の数値解析と誤差評価

藤　井　克　己*

Numerical Evaluation on the Accuracy of Soil Water Movement Simulation, Oriented to Water Table Recharge Problem

Katsumi Fujii
Faculty of Agriculture, Iwate University

Summary

Finite difference method was applied to analyze one-dimensional unsaturated-saturated water movement in soil. Because it is difficult to obtain the exact solution analytically on usual physical phenomena in soil-water system, it follows that numerical analysis can be checked on only two ideal cases, namely, vertical infiltration into uniform soil column from its surface, and water table recharge above impermeable boundary.

Then both stability and accuracy of numerical scheme were evaluated by comparing numerical solutions with exact ones, for various sets of grid sizes (Δt, Δz). Two iterative methods, the linear method and the Newton method were adopted to solve the system of non－linear algebraic equations derived from partial differential equation.

In case of vertical infiltration, both methods were found to give sufficient stability, when satisfying von Neumann's criteria. Their numerical errors could be minimized below 5%, by letting both grids sizes approach zero.

However, too small sizes of finite differences caused the serious accumulation of round-off errors, when used to simulate water table recharge. It proved that the Newton iterative method was more accurate than the linear one, and was applicable to a wide variety of problems in soil-water system.

Key words：numerical analysis, finite difference method, water movement, stability and accuracy

(Soil Phys.Cond.Plant Growth, Jpn, 68, 3－14, 1993)

1．はじめに

降雨に伴う水の浸潤と再分布は，土中の水分移動における最も基本的な現象であり，以前から様々な数値解析技法が追求されている。ここでその下部境界条件は，地下水位（つまり水分ポテンシャルの値）を一定におくもの[1]や，排水可能か不透水性であるかを状況により選択できるようにしたもの[2,3]などであるが，浸潤・再分布から下層における貯留までを，一貫して扱った計算例は極めて少ない。

このことは，多分に，降雨浸潤により，畑地土壌中の水分が下方に移動しても，これが地下水域を涵養するまでには多大な日時を要すること，また仮に飽和領域に水分が供給されても，現実には水平方向の水分移動により地下水位変化を生じにくいことなどによるものであろう。したがって，下層における排水に伴う水分変化は，地下水移動解析と同様の手法で，表層での水分移動とは切り離して扱われることが多い[4]。

しかしながら，空間的な広がりをもち，深さに応じて土性の異なるような現場土壌における水分移動を，不飽

*岩手大学農学部

キーワード：数値解析、差分法、水分移動、安定性と精度

和から飽和へ，あるいは降雨による浸潤から，再分布，表層での乾燥もしくは下層での貯留に至るまで，一貫して取り扱い，二次元・三次元的にシミュレートすることが，今日求められているといえるだろう。またこれを精度よく効率的に行なうためには，数値解析技法の安定性・正解性などの問題点を，一次元的な水分移動の事例に即して検討しておく必要がある。

本報では，以上の観点から，浸透水の下層における貯留を特に考慮しうるシミュレーション技法の開発を差分法を用いて取り組み，差分の計算間隔と安定性・正解性との関連について検討した結果について紹介する。

2．土中の水分移動解析における解の安定性と精度

1．水分移動の基礎方程式と差分式

一般に，不飽和土壌中の水分移動は，Richardsの方程式とよばれる土中水のマトリックポテンシャルψに関する偏微分方程式で表される。

$$C(\psi)\cdot\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(K(\psi)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K(\psi)\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K(\psi)\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)-\frac{\partial K(\psi)}{\partial z}\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

ここで，C：水分容量，K：透水係数とし，水ポテンシャルψを長さを単位とする水頭で表示すれば，Richards式は，重力加速度gや水の密度ρ_wを含まない上式のような表記となる。

（1）式に対し，マトリックポテンシャルψと体積含水率θとの関係より，含水率θを従属変数とする偏微分方程式に変換したKluteの方程式も，解析の手段として広く知られている。ただし，ここで水分の移動しやすさの指標となる水分拡散係数Dは，飽和状態において無限大の値をとるため，Klute式の適用は不飽和状態に限定される。

このように先のRichards式は，不飽和から飽和に至る領域を一貫して取り扱うことができるという特徴をもっている。ただし，その係数は一定値とならず，土の水分状態，つまりポテンシャルの大きさに応じて変化する。したがって，Richards式は非線形の拡散型偏微分方程式となり，その解析解は，一次元のごく単純な境界条件に限って与えられる。これ以外の条件においては，数値解法によらざるをえないが，飽和状態を含む場合，ここでの水分フラックスとポテンシャルの変化量が著しく増大するため，数値計算に不安定さを生じやすい。また仮に解が安定的に収束しても，これが常に正解を示すという保証はない。

ここでは，飽和領域を含む土中水の鉛直一次元移動に関し，数値解法として差分法をとり上げ，その計算間隔と演算の安定性，正解性の関係について検討を加える。Richardsの方程式を鉛直一次元の変化に限定し，長さの刻みをΔz，時間刻みをΔtとして差分表現すれば次式のようになる。

$$\bar{C}_i\frac{\psi_i'-\psi_i}{\Delta t}=\left[\bar{K}_{i+1,i}\frac{\bar{\psi}_{i+1}-\bar{\psi}_i}{\Delta z}-\bar{K}_{i,i-1}\frac{\bar{\psi}_i-\bar{\psi}_{i-1}}{\Delta z}\right]\times\frac{1}{\Delta z}-\frac{\bar{K}_{i+1,i}-\bar{K}_{i,i-1}}{\Delta z}\quad\cdots(2)$$

すなわち，節点iにおける水分量の変化を，上（i−1）・下（i+1）の節点と節点iとのフラックス差から求めるものである。

このとき，節点iでのポテンシャル$\bar{\psi}_i$は，計算の現時点におけるポテンシャルψ_iと，Δt後の次時点におけるポテンシャルψ_i'との平均として，次時点への重みをηとすれば，次式で表される。

$$\bar{\psi}_i=\eta\,\psi_i'+(1-\eta)\,\psi_i\quad\cdots(3)$$

透水係数Kも同様に，2節点をはさむ領域で2つの時点の平均量と考えられるものである。

2．数値計算の安定性について

数値計算における安定性は，差分式における時間空間の刻みΔt，Δzと係数K，Cの大きさに依存する。また計算の時間重みηを現時点におくのか，次の時点におくのかによっても，大きく異なったものとなる。

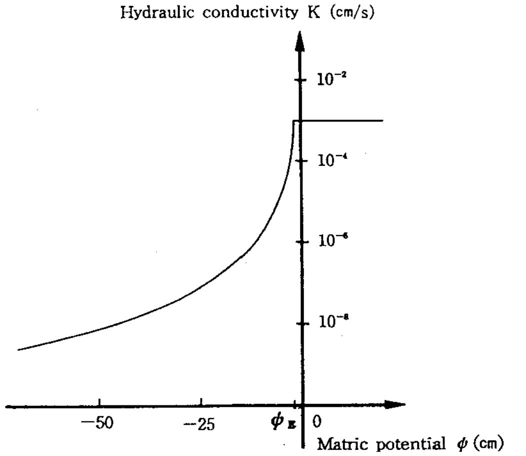
例えば，$\eta=0.0$とし，現時点の値ψ_iのみを用いて平均値を表した場合，差分式（2）における未知値はψ_i'の1つであり，これは陽的に求められるため，数値解法のアルゴリズムも簡単なものである。ただし，計算は不安定なものとなる。von Neumannの安定性解析として広く知られるように，この「陽公式」が安定であるために，次の2つが必要条件として同時に要求される[5)]。

$$\frac{\Delta t}{(\Delta z)^2}\cdot\frac{K}{C}<\frac{1}{2}\quad\cdots(4)$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta z}\cdot\left|\frac{1}{C}\cdot\frac{dK}{d\psi}\right|<1\quad\cdots(5)$$

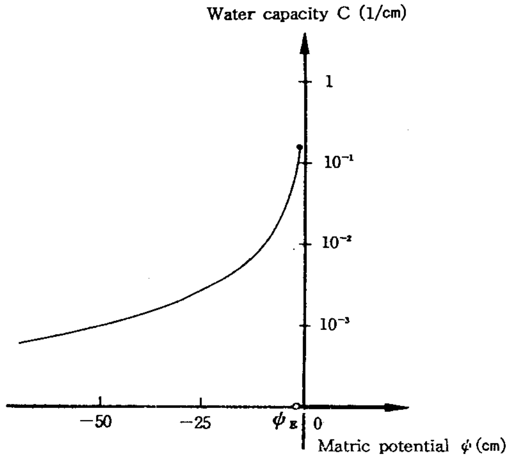
ここで，（4）式のK／Cは［（長さ）^{2}／（時間）］の次元をもち水分拡散係数に対応する量である。これに対し，（5）式はCourant条件とよばれ，水分移動における重力項・移流項を反映したものとなる。

一方，$\eta=0.5$とし，現時点と次時点のポテンシャルの算術平均によって表現するものは，Crank−Nicolson法とよばれ，広く用いられる。この場合，節点iに関す



図－1　マサ土の透水係数とマトリックポテンシャルの関係

Fig.1　Hydraulic conductivity as a function of matric potential for Masado[7]. Note log scale for K but not ϕ.

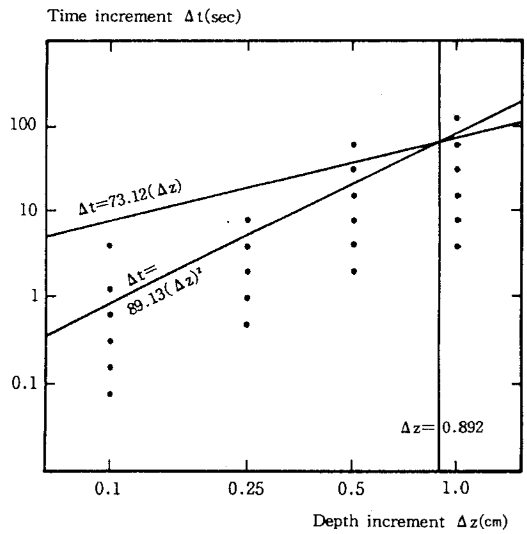


図－2　マサ土の水分容量とマトリックポテンシャルの関係

Fig.2　Water capacity as a function of matric potential for Masado[7]. Note log scale for C but not ϕ.

る差分式には，次時点の未知の値を3つ含むため陽的には求まらず，他の節点に関する式と連立して解くことが求められる。同様にη＝1.0の場合，完全な「陰公式」となる。これらは「陽公式」に比べ，解法が複雑とはなるものの，線形の偏微分方程式であれば，計算の安定性は無条件に良いとされている。非線形の場合には，計算が安定であるとき，最大値原理より次の十分条件を満たしている[5]。

$$\Delta z \leqq 2 \cdot \frac{K}{(dK/d\phi)|_{MAX}} \quad \cdots (6)$$



図－3　差分間隔と数値解析の安定性条件

Fig.3　Time and depth increment(Δt, Δz), and stability criteria for numerical analysis. (Small dots correspond to the increments used in this study.)

3．土の水分特性と安定条件

土中の水分移動の解析に先立って，不飽和土の特性を実験的に定めておくことが必要である。具体的には，土中水のマトリックポテンシャルϕと，透水係数Kを体積含水率θの関数として表現することである。近年では，測定結果のパラメータ同定に，van Genuchtenの提示した[6]実験式を用いることが多いが，ここではマサ土の測定結果に対してCampbell式を適用した宮崎氏の実験式[7]を採用することとする。すなわち，

$$\phi = -1.49\ (0.52/\theta)^{2.24} \quad \cdots (7)$$

$$K = 9.508 \times 10^{-4} (-1.49/\phi)^{3.34} \quad \cdots (8)$$

つまり，空気浸入ポテンシャルϕ_E＝－1.49cm，飽和時の体積含水率θ_s＝0.52，飽和透水係数K_s＝9.508×10^{-4} cm/sとしており，定義より水分容量は，

$$C = \frac{d\theta}{d\phi} = 0.52\left(-\frac{1}{2.24}\right)\left(\frac{-1.49}{\phi}\right)^{1/2.24}\frac{1}{\phi} = \frac{\theta}{-2.24\phi} \quad \cdots (9)$$

（8），（9）式に基づき，K，Cをϕの関数として表せば，図－1，2のようになる。

これらの関係を先の３つの条件に代入するとき，解の安定条件として最も厳しいものは，飽和状態にあるときである。この値を具体的に求めれば，それぞれ次のようになる。

$\Delta t < 81.93\ (\Delta z)^2$ … (10)

$\Delta t < 73.12\ (\Delta z)$ … (11)

$\Delta z \leqq 0.892$ … (12)

ここで，Δz，Δtの単位は，各々［cm］，［s］である。これをΔt～Δzの座標系において図示すると，図－3のように3直線は1点で交わり，全ての条件を満たす（Δt，Δz）の点は，直線の下，さらに左で，かつ正の値をとる台形状の領域に限定される。

3．線形反復法による解の安定性と精度の検討

1．線形反復法について

水分ポテンシャルの変化を表すRichards式の非線形性は，専ら透水係数Kが一定でなくψの関数として著しく変化することに基づいている。このような非線形係数の偏微分方程式に対しては，「線形反復法」とよばれる手法を用いるのが，一般に平易で簡便である。すなわち，現時点のマトリックポテンシャル値とそれによる透水係数の値に基づいて，次時点のポテンシャルの予測値〔1回目〕を求める。次に，これにより定まる次時点の透水係数と現時点のものとの平均値として透水係数を表し，ポテンシャルの修正値〔2回目〕を定める。このような修正をさらに反復して行い，値の変化がある範囲内に収まるとき，これを次時点の値とする方法である。反復回数は判定基準の粗さにもよるが，通常3回ほどで収まることが多い。

2．計算条件

今回の水分移動計算は，$\eta=0.5$のCrank－Nicolson法，もしくは$\eta=1.0$の陰解法により，先ず上記の線形反復法を用いて行なうこととする。このとき，安定性に関する先の３つの条件を必ずしも全て満足する必要はない。ここではあくまでも一つの基準と考えて，図－3中の黒丸に示したΔt，Δzに関して演算を行ない，解の安定性，正解性を検討する。

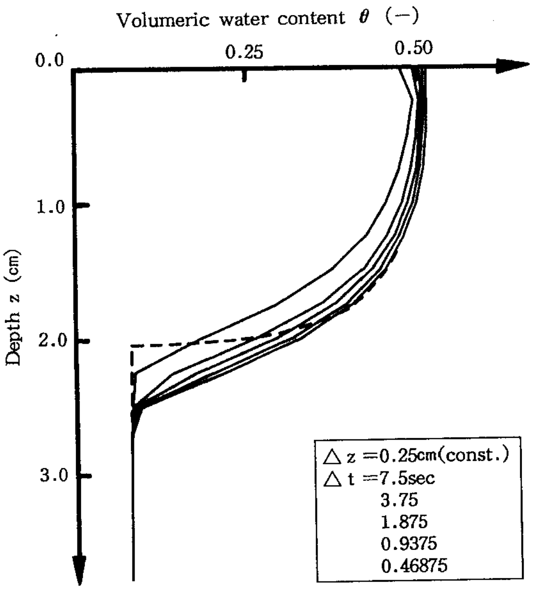
計算の正確さ，精度の良しあしを定量的に調べるには，解析解の既に得られている水分移動現象を扱うことが求められる。ここでは，次の２つの事例を取り上げることとした。

①初期含水率$\theta=0.0795$（$\psi=-100.0$cmに相当）の乾いた均一な土の表面を飽和し，降下浸潤させるときの水分分布の変化

②初期含水率$\theta=0.40$の湿った均一な土層の１m深さに不透水層が存在するとき，そこに生じる貯留水位と水分分布の変化

このうち①の降下浸潤については，計算時点に対する重みηを0.5～1.0の範囲内に設定した上で，差分式（2）における係数K，Cに先の土壌特性（8），（9）式をψの関数として個々に与えればよく，演算に際して特別な注意を払う必要はない。表面飽和の降下浸潤現象に関しては，既にPhilipにより解析解が与えられている[8]。その解は，ある含水率に対応する浸潤深さをz（θ）の形で表すものであり，解析解とはいうものの単純な演算を経て「陽的には」求まらない。ここでは，HuyakornとPinderの整理[9]にしたがって，これを求めた。

②の下層における貯留現象については，計算の対象に飽和領域を含むため，これに対するプログラム上の配慮が必要である。つまり，$\psi>\psi_E$となる節点では，これを飽和と判断して，$K=K_S$，$C=C_S$の値を設定する。ここでK_Sは所定の飽和透水係数値（$=9.508\times10^{-4}$cm/s）であり，C_Sには微少な正の値（例えば10^{-6} 1/cm程度）を用いる。水分特性曲線からも明らかなように，飽和領域において含水率θは一定で，$C_S=d\theta/d\psi\fallingdotseq0$と



図－4 降下浸潤10分後における含水率分布の数値解（Δz＝0.25cm 一定として，Δtを様々に変えた例）

Fig.4 Simulated water content during vertical infiltration as a function of depth at 10 min., for various Δt and constant Δz. Broken line is analytical solution.

なる。C_sに対し，有限の大きな値を用いると，水分変化がポテンシャルの変化に十分反映されないため，結果的に貯留水位の変化を正確に表現できず，マスバランスも合わなくなる。計算に用いるC（ψ）曲線は，図－2のようにψ_Eを境に不連続なものとなるが，これによる影響は生じない。

3．降下浸潤現象に対する計算結果とその精度

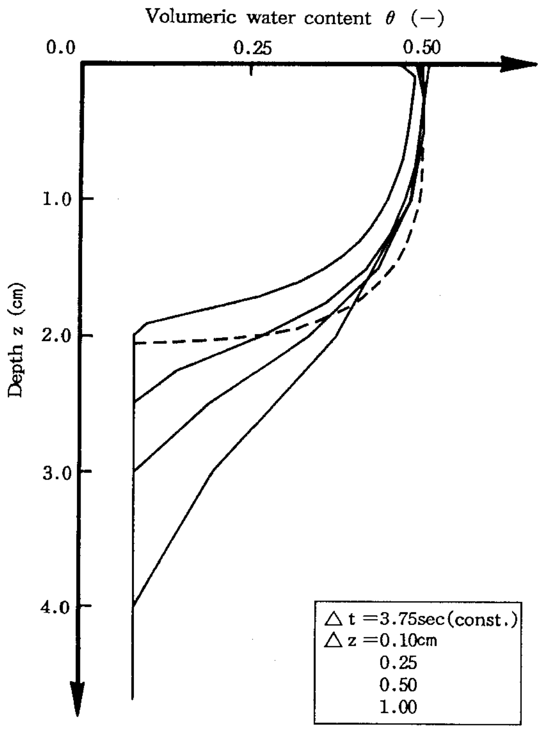
前述の降下浸潤に対し，時間・空間刻みΔt，Δzを様々に変えて，演算に及ぼすこれらの影響を検討する。

先ず，Crank－Nicolson法（η＝0.5）により，深さ刻みをΔz＝0.25cmで一定として，時間刻みΔtを7.5～0.46875秒と変えたときの10分後の水分分布を求めた結果を図－4に示す。長い時間刻みにおいては，浸潤開始直後，地表面付近の水分移動の著しい箇所で，現実には起こりえない長周期の振動現象も見られたが，発散することなく時間の経過とともに収拾した。

時間刻みを半減させるのに対応して，数値解はある分布へと収斂していく様子がうかがえる。これは，表面から1.8cm付近の深さまでは，Philipの解析解（破線）とほぼ一致するものの，それ以深ではかけ離れた分布へと収束している。このことから，浸潤前線付近における水分量の急変を，0.25cmという深さ刻みでは的確に表現できないことを理解できる。

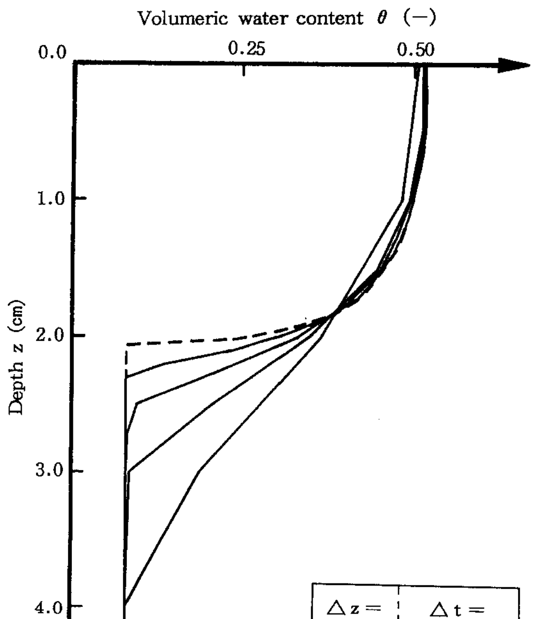
次に，同じくCrank－Nicolson法により，時間刻みを3.75秒で一定とし，深さ刻みを1.0～0.1cmと変えた計算結果を図－5に示す。Δzを小さくするのに応じて，深さ2cm付近における水分量の急激な変化を表現できるようにはなるものの，分布が全体に縮小してしまうため，浸潤水量の点で合わなくなっている。これは，時間刻み3.75秒が，浸潤を扱うには過大であることを物語っている。

以上のことから，計算精度を向上させるには，ΔzとΔtをともに一定の割合で小さく設定することが求められる。この観点より，図－6にΔz＝1.0cm，Δt＝7.5秒を起点とし，双方をΔz∝（Δt）^{2}の関係を満たしな



図－5　降下浸潤10分後における含水率分布の数値解（Δt＝3.75 sec 一定として，Δzを様々に変えた例）

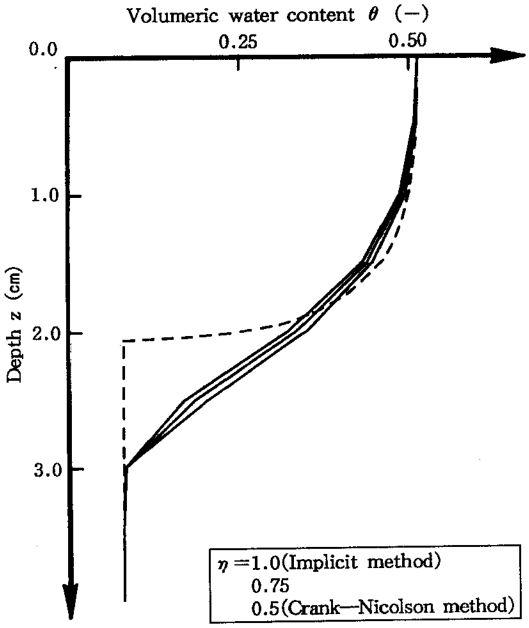
Fig.5　Simulated water content during vertical infiltration as a function of depth at 10 min., for various Δz and constant Δt. Broken line is analytical solution.



△z＝	△t＝
0.10cm	0.075sec
0.25	0.46875
0.50	1.875
1.00	7.50

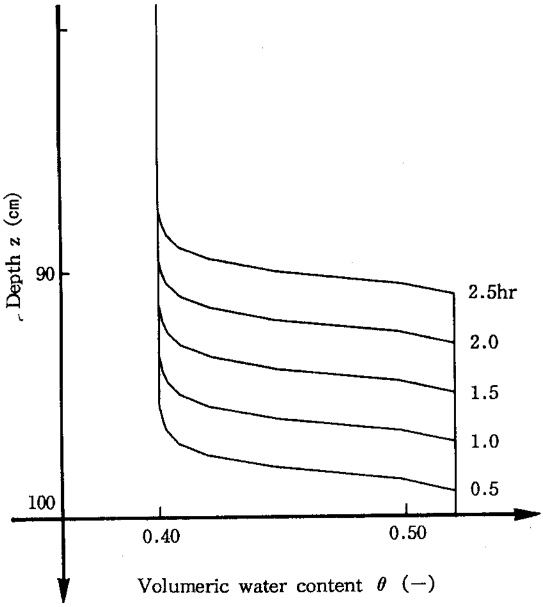
図－6　降下浸潤10分後における含水率分布の数値解（Δt∝Δz^{2}に保ち，両方を変えた例）

Fig.6　Simulated water content during vertical infiltration as a function of depth at 10 min., for various sets of Δt and Δz. Broken line is analytical solution.



図－7　降下浸潤１０分後における含水率分布の数値解（Δ t =1.875 sec, Δ z =0.5 cmに保ち，η を変えた例）

Fig.7　Simulated water content during vertical infiltration as a function of depth at 10 min., for various η and constant Δ t and Δ z . Broken line is analytical solution.



図－8　貯留による水分分布変化の数値解（Δ t =7.5sec, Δ z =0.5cm, η =0.5, $C_s=10^{-6}cm^{-1}$）

Fig.8　Simulated water content during recharge as a function of depth at five different times.

がら縮減させたときの計算例を示す。Δ z =1.0→0.5→0.25→0.1cmと刻みを小さくするのに応じて，計算精度は飛躍的に向上するものの，Δ z =0.1cmにおいてもなお若干の誤差が存在する。

例えば，初期固相率7.95%に対し，浸潤により増加した総水量を求め解析解と比較すれば，誤差は27.7→15.6→8.72%とほぼ半分強の割合で減少していくが，Δ z =0.1cm，Δ t =0.075秒で4.40%と依然無視できないものがある。この場合，誤差の大半は，浸潤前線付近で生じており，正確な分布を表現するためには，さらに深さ方向に細かな刻みが必要である。

降下浸潤現象については，節点を等間隔に設けるのでなく，地表面付近を密にした幾何級数的配置の方が，演算精度の高いことが知られている[10]。一方，表面湛水下の浸潤が長時間に及ぶと，マサ土を想定したこの例の場合，浸潤前線は同じ形状を保ったまま，重力項に従って降下する。したがって，降下浸潤に対してこれを精度よく扱うためには，演算の稠密な間隔を地表面に固定せずに，前線とともに移動させるような工夫も必要であろう。

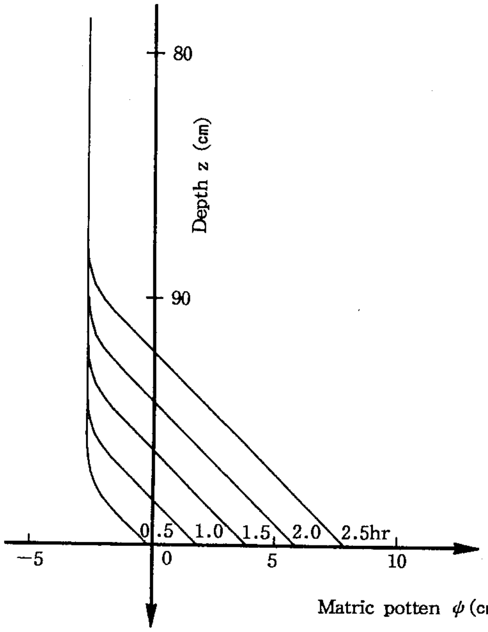
次に，計算時点に関する重み η を変えて，η =0.5のCrank−Nicolson法，η =0.75，さらに1.0の陰公式について結果を比較し，図－７に示す。ここにはΔ z =0.5cm，Δ t =1.875秒の例しか載せていないが，計算の全体を通じて，パラメータ η の大きいほど体積含水率 θ の小さな結果がみられた。したがって，浸潤前線付近までの浅い領域では，η =0.5〔Crank−Nicolson法〕の精度が上回るが，総浸潤水量で比較した場合，η =1.0〔陰公式〕の方が逆に良く一致する。このように η =0.5～1.0の範囲で，数値計算上決定的に有利なパラメータ値は見当らないと判断できる。

一方，透水係数の評価方法については，上下２節点の幾何平均を用いるのがよい[11]とされているが，ここでは簡単のために算術平均を採用した。Δ zの小さな場合，両者に有意な差は生じないと考えられる。

4．貯留現象に対する計算結果とその精度

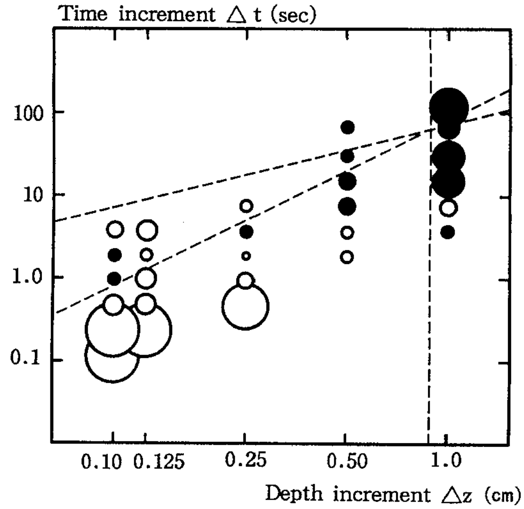
次に１mの深さに不透水層を想定し，ここに降下浸透水の貯留の生ずる場合を，空間・時間刻みΔ z，Δ t を種々変えながら演算する。

一例として，η =0.5のCrank−Nicolson法により，Δ z =0.5cm，Δ t =7.5秒として，体積含水率 θ の経時



図－9　貯留によるポテンシャル分布変化の数値解
（$\Delta t=7.5$sec, $\Delta z=0.5$cm, $\eta=0.5$, $C_s=10^{-6}cm^{-1}$）

Fig.9　Simulated matric potential during recharge as a function of depth at five different times.



図－10　差分間隔Δｔ，Δｚとその貯留演算における誤差（線形反復法）

Fig.10　Sets of Δｔ，Δｚ，used for recharge simulation, and those numerical errors.(Open circles indicate plus error to the analytical solution,closed ones minus. Broken lines correspond to stability criteria in Fig.3.)

的変化を計算し，30分ごとの分布として図－８に示す。初期の含水率が40％と大きいため，再分布直後の0.5時間において既に$\theta_s=52\%$の飽和域が生じ，その後同じペースで貯留水位が上昇している。この場合，0.5cmという深さ刻みは，貯留水位付近の水分分布をなめらかに表現する上で，少々粗いものであるが，それによって水分分布の変化が経時的に損なわれてしまうというほどのものではない。

同じ計算結果をマトリックポテンシャルψの時間変化として表したものを図－９に示す。飽和域のポテンシャルは空気浸入ポテンシャル－1.49cmを上回り，傾き－1の右下がりの直線となる。さらにこれが重力項と相殺してゼロとなる。飽和域に近く，その透水係数は極めて大きいが，全ポテンシャル勾配がゼロであるため，ここでの水分移動は生じない。また地下水位の上昇速度は，最下層におけるポテンシャルの変化から把握される。

一方，地下水位の３cmほど上部では，再分布後2.5時間を経過しても，依然，初期値が保たれており，その上方には含水率，ポテンシャルともに一定の領域が形成されている。ここでは，重力勾配（＝１）に従って水分移動が引き起こされるものの水の出入りが均衡するために，見かけ上，含水率の変化は表れないわけである。

換言するなら，最下層における貯留水位の上昇は，含水率一定の不飽和域の水分フラックスによって規定される。$\theta=0.40$における試料の透水係数は$K=1.336\times10^{-4}$ cm／ｓ，これの重力勾配によって生ずる１時間当りのフラックスは$1.336\times10^{-4}\times3600=0.48096$cm。これが気相率（0.52－0.40）＝0.12のすきまに浸潤して系を飽和させるので，貯留水位の上昇速度は4.008 cm／hrと解析的に与えられる。

このことから，再分布後，0.5から2.5時間の2.0時間にわたる，最下層のポテンシャル変化を調べることにより，計算精度を検討することができる。様々な刻みΔｚ，Δｔについてこれを行い，誤差の程度を円の大きさで表したものを図－10に示す。

数値計算に際して生ずる誤差は，打ち切り誤差（Truncation Error）と丸め誤差（Round－off Error）とに大きく分類される[12]。ここで打ち切り誤差は，本来，連続的な値をとりうる微分量を，離散的な値として差分近似することによって生ずるものであり，差分間隔Δｚ，Δｔを小さくとれば，微小量に抑えられる。降下浸潤において解析解との誤差が，$(\Delta z)^2$やΔｔに比例するこ

とは既にみたとうりである。

これに対し，丸め誤差は，通常の単精度演算における数値の有効桁数が7桁ほどであることから，大きさのかけ離れた数値の加減算等において，有効桁が脱落することによって生じる。これは演算刻みを小さくし，系の変化量を相対的に小さくすることによって，逆に累積しやすいものである。

以上の点から改めて図－10をみると，打ち切り誤差に由来する誤差は，Δｚ＝1.0cm，Δｔ＝120秒の－5.39％を絶対値の最大としながら，Δｚ，Δｔを小さくするのに対応して漸減し，＋0.1％程度に低下する。これらは概して，解析解よりも貯留水深が不足し，マイナスの値を示す傾向がうかがわれる。

さらに刻みを小さくしていくと，誤差が著しく増大し，Δｚ＝0.25cm、Δｔ＝0.469秒で＋11.3％，0.125cm、0.234秒で24.2％，0.10cm，0.234秒および0.117秒でそれぞれ＋28.1％，＋26.0％と，ほとんど演算としての信頼性の損なわれるほど過大なものとなっている。これは前述の整理からも，丸め誤差の集積に起因するものと判断される。誤差増加の様子を経時的にみると，これはある時点で突如生じるものではなく，少しずつ着実に累積していくことが分かる。

ただし，丸め誤差が水分移動計算プログラムのどの行で発生しているのか，具体的には特定できない。しかし，これが差分間隔の縮小，ならびに計算回数の増大と密接な関係にあることは明らかである。今回の演算に用いた計算機は，処理速度が21ＭＩＰＳと大型計算機のなかで中位の水準を有するものであるが，演算に際し，Δｚ，Δｔの減少に反比例して計算時間は増加し，20％を越える誤差を生じた際の実cpu時間は15分以上に達している。これに対し，0.1％前後という図中で最高の精度を示した0.25～0.50cm，1.875秒の事例では，cpu時間が1分を上回ることはない。

このように下層での貯留水域を含む計算において，計算刻みを安易に縮小することは丸め誤差の集積を招き，極めて危険である。この場合は，上記のように解析解の得られる条件を想定して，予め最適の刻みを策定しておく必要がある。この点で，前に述べた降下浸潤の事例とは大きく異なっている。

4．Newton法による解の安定性と精度の検討

1．非線形方程式の解法としてのNewton法について

前章では，水移動式のもつ非線形性，つまり係数K，Cのψ依存性に対し，線形近似を反復することで対処し，降下浸潤については所定の精度をえたものの，下層での降下浸透水の貯留計算においては，深刻な誤差の発生を招きかねないことを明らかにした。ここでは，非線形方程式の解法の代表的なものの一つであるNewton法を取り上げ，その適用事例を検討する。

節点ｉにおける水分量の時間変化を表す差分式（２）を移項し，マスバランスF_iとして表現すれば，次のようになる。

$$F_i=\bar{C}_i\,\frac{\psi_i{}'-\psi_i}{\Delta t}-\bar{K}_{i+1,i}\left[\frac{\bar{\psi}_{i+1}-\bar{\psi}_i}{\Delta z}-1\right]\frac{1}{\Delta z}+\bar{K}_{i,i-1}\left[\frac{\bar{\psi}_i-\bar{\psi}_{i-1}}{\Delta z}-1\right]\frac{1}{\Delta z}=0 \qquad \cdots(13)$$

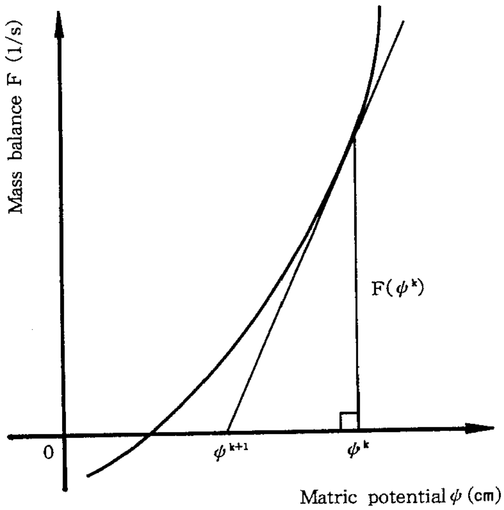
Newton法は$\vec{F}(\vec{\psi})=0$を満たす$\vec{\psi}$を求めるにあたり，ある最新の近似値$\vec{\psi}^k$をもとに，次の近似値$\vec{\psi}^{k+1}$を次式から得るものである。

$$\vec{\psi}^{k+1}=\vec{\psi}^k-J^{-1}(\vec{\psi}^k)\cdot\vec{F}(\vec{\psi}^k) \qquad \cdots(14)$$

ここで，$\vec{\psi}$，$\vec{F}$はｉ＝１～Ｎのベクトルであり，Ｊは次のように，$\vec{F}$のJacobi行列である。

$$J\equiv\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial\psi_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial\psi_2}\cdots\cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial\psi_i}\cdots\cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial\psi_N}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \dfrac{\partial F_i}{\partial\psi_1} & \dfrac{\partial F_i}{\partial\psi_2}\cdots\cdots & \dfrac{\partial F_i}{\partial\psi_i}\cdots\cdots & \dfrac{\partial F_i}{\partial\psi_N}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \dfrac{\partial F_N}{\partial\psi_1} & \dfrac{\partial F_N}{\partial\psi_2}\cdots\cdots & \dfrac{\partial F_N}{\partial\psi_i}\cdots\cdots & \dfrac{\partial F_N}{\partial\psi_N}\end{vmatrix} \qquad \cdots\cdots(15)$$

$\vec{F}(\vec{\psi})$がなめらかな連続関数であれば，１変数の場合を図－11に模式的に示すように，２～４回程度の反復近



図－11　Newton法の模式図

Fig.11　Diagram of the Newton iterative method.

似でFの値が極微小値となり，次時点の解ψ'が得られる。

以上の解法を，今回の２つの計算事例に適用するにあたり，計算時点の重みηは，簡単のために$\eta=1$の完全陰公式を採用する。これは線形反復法において，$\eta=0.5\sim1.0$の範囲でηを変えても，有意な差が見られなかったことによる。また上・下端におけるマスバランスの計算（F_1, F_N）に際し，計算の対象外に存在する節点（$i=0$）と（$i=N+1$）に関する項は予め省いて扱う。

さらに行列Jの要素，例えば$\partial F_i/\partial\psi_i$の計算において，$C_i$, K_iをψ_iで偏微分するとき，これは（8），（9）式より次のようにψ_iを分母に含む形で求められる。

$$\frac{\partial K_i}{\partial\psi_i}=K_i\left(\frac{-3.34}{\psi_i}\right) \qquad \cdots(16)$$

$$\frac{\partial C_i}{\partial\psi_i}=C_i\left(-\frac{1}{\psi_i}\right) \qquad \cdots(17)$$

ただし，以上の関係は不飽和においてのみ成立するものである。飽和領域においては，図－１，２より明らかなように，両者にゼロに近い微少な正の一定値を与えることが必要である。

このとき$\partial F_i/\partial\psi_i$の要素には，次の項だけが残る。

$$\frac{\partial F_i}{\partial\psi_i}=(\bar{K}_{i+1,\,i}+\bar{K}_{i,\,i-1})\cdot\frac{1}{(\Delta z)^2} \qquad \cdots(18)$$

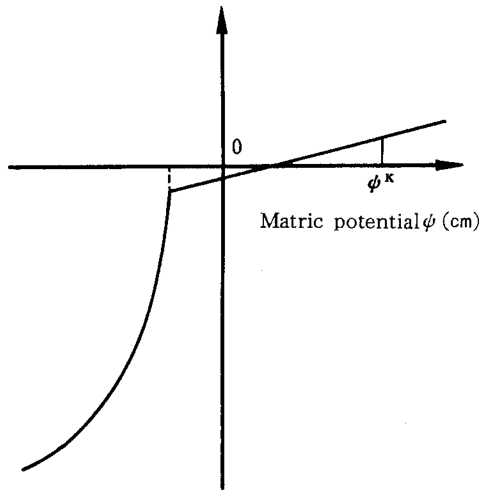
したがって，飽和状態にあっても，行列Jの対角要素は微小ではあるものの一定な正の値をもち，ゼロとはならない。このように$\partial F_i/\partial\psi_i$を$\psi_i$の関数として大まかに把握することにより，$F(\psi)$の関係を１変数の場合について，図－12に模式的に表すことができる。

これをみるとψが増加し，飽和に近づくにつれ（$\psi\to\psi_E$），Fの値は著しく増大する。そして空気浸入圧ψ_Eにおいて変曲点をもつ。さらに，系が飽和状態にあり，図のように$F(\psi)=0$が正圧の解を有する場合には，１回の修正によって解は収束する。ただし傾きが小さいため収束までの変化量は大きい。これに対し，不飽和状態にあっては$F(\psi)$曲線の勾配が急であるため，収束に至るまでの反復回数は１回で済まないものの，変化量は小さいことが推測される。

2．線形反復法との比較・検討

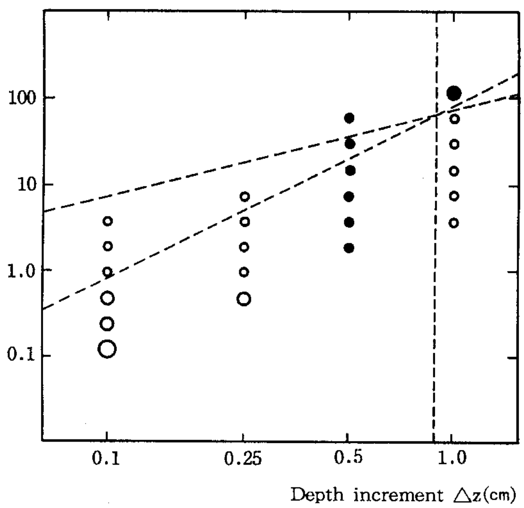
これらの事項をふまえながら，線形反復法と同じ２つの事例に対して演算を行ない，比較を試みた。先ず，降下浸潤に対してNewton法を適用した場合，計算の安定性，精度，収束の速さ（計算時間）などの点で，特に有意な差は見いだされなかった。

一方，下層１ｍにおける貯留現象に対してもこれを適



図－12　飽和域を含む場合のマスバランスとマトリックポテンシャルの関係

Fig. 12　Illustration of mass balance as a function of matric potential, including saturated zone.



図－13　差分間隔Δｔ，Δｚとその貯留演算における誤差(Newton法)

Fig. 13　Sets of Δt, Δz, used for recharge simulation, and those numerical errors. (Open circles indicate plus error to the analytical solution, closed ones minus. Broken lines correspond to stability criteria in Fig.3. Error scale is the same as in Fig.10)

用し，再分布開始後0.5→2.5の２時間にわたる貯留水位変化より求めた計算精度を，先の図－10と同じ表記法を用いて図－13に示す。差分刻み，特に時間刻みを小さくするのに応じて誤差が減少するものの，小さくとりすぎると逆に誤差増加を招くという傾向は，線形反復法と同様である。

しかしながら，誤差の絶対値はNewton法がはるかに小さな値を与えている。例えばΔｔ＝0.9375～60.0秒の範囲で，誤差が0.1％を上回ることはない。そして，Δｚ＝0.5cmで一定として求めたΔｔの異なる６点の誤差の平均値は0.033％，Δｔ＝3.75秒で一定の４点の平均では0.027％と，線形反復法におけるそれぞれの値，0.356％，0.462％と比べて，圧倒的に小さな値を誇っている。

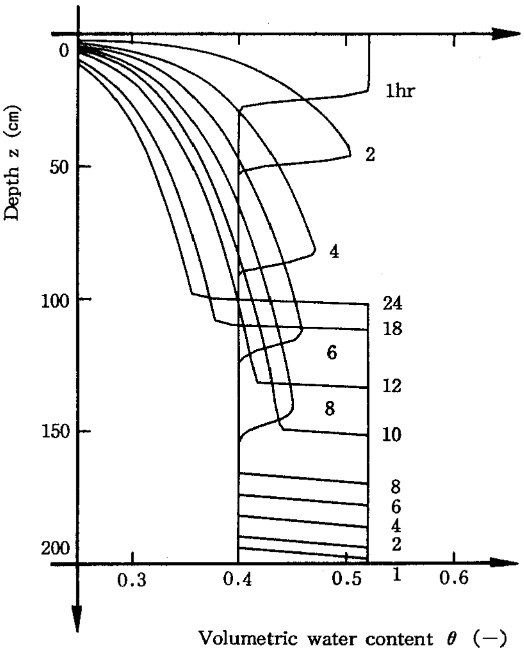
また線形反復法では，差分刻みを小さくするのに応じて，計算時間が増加し，実計算時間が15分を越える場合には，丸め誤差が発生し，これは20％以上にも達した。Newton法においても，収束に至るまでの計算回数は線形反復法と同程度であるため，計算に要する時間に特徴的な差は見いだせない。しかしながら丸め誤差の集積は低く抑えられ，図中の最大でも0.92％（0.1cm，0.117秒）にすぎない。

このように飽和域を含む下層の水分移動解析にNewton法を適用することは，計算時間の縮減には直接つながらないものの，線形反復法よりも安定的でかつ精度の高い演算を保証するものといえる。この場合，誤差が0.01％という極小の値に収まったのは，Δｚ＝1.0cm，Δｔ＝60～7.5秒の範囲である。

解の安定性と正解性が満たされるならば，その中で最も計算効率の優れた，つまり計算時間の最小で済むものを選択すべきである。したがってこの例では，Δｚ＝1.0cm，Δｔ＝60秒が最適の計算刻みとなる。ただし先にみたように，これは降下浸潤現象に対して，きわめて不正確な分布しか与えないものである。したがって，計算の対象と土の特性に応じて，土層の深さ・含水率ごとに最適の計算刻みを，正解性と計算効率の両面から求めることが必要である。

３．降下浸潤，蒸発，再分布，貯留の計算

ここまで解析解の明らかなものと計算値を比較するために，表層からの降下浸潤と下層での貯留を全く別個に扱ってきた。しかし現実には，降雨による浸潤に引続き，蒸発・再分布・貯留などの現象が不可分な一連のプロセスとして生じている。ここでは２ｍの土層について，表層の飽和浸潤１時間後，表面のマトリックポテンシャルを－100cmで一定に保ち，24時間後まで計算した事例について検討する。



図－14　浸潤後の乾燥，再分布，貯留に伴う水分分布変化の数値解（Newton法，Δｔ＝15sec，Δｚ＝1.0cm）

Fig. 14　Simulated water content profiles during evaporation, redistribution and recharge after infiltration.

計算は図－13に示すようなΔｚとΔｔの組み合わせについて行なった。このうち時間刻みΔｔを30秒より大きく設定した場合，浸潤から１時間後，表面境界条件を蒸発側に切り替える際に，計算が不安定となり，上向きの過大な水分フラックスにより，浸潤した水分量以上の水が表面から損なわれるという計算結果を得た。

これは浸潤終了後，表面の水分ポテンシャルを瞬間的に－100cmまで減少させているためであり，現実には起こり得ない仮想的な状況である。しかし，浸潤後の一連の現象に対する計算の安定性を検討するために，これをあえて設定した。このとき，Δｚ＝1.0cm，Δｔ＝480秒という粗い差分刻みにおいては，逆に計算の安定化する例もみられたが，正解性の点で不満を残すものとなった。

そこで，Δｚ＝1.0cmと一定に保ちながら，Δｔを半減させたとき，初めて安定な演算結果の得られたΔｔ＝15秒の例を図－14に示す。１時間にわたって浸潤した水分量が，明瞭な前線部分を保ちながらほぼ定速で降下し，10時間後に深さ152cmの地下水位に到達している。浸潤水分の通過した深さでは，乾燥した表面（θ＝7.95％）

に吸い上げられる形で，着実に水分が減少していく。

一方，最下層では，浸潤直後から貯留が始まり，一定の速さで水位が上昇する。そして浸潤水分の到達する前後（8～12時間）に最も多く上昇し，それ以降，上昇速度は漸減しながら平衡状態へと向かう。先の例と同様に，初期含水率$\theta=40\%$で一定の層が存在し，水位の上昇速度も一定と保たれる1～8時間の水位変化より，計算誤差を求めると-0.0345%となる。これは先の深さ1mの土層の例と比較しても，ほぼ同程度の値と評価できる。

図－14の24時間にわたるシミュレーションに要する実cpu時間は31.4秒であった。この計算刻み（$\Delta z=1.0$ cm，$\Delta t=15$秒）をともに半減させて演算を試みるとき，演算精度は一定程度向上するものの，他方でcpu時間は約4倍に増加する。

図－14の事例は蒸発・再分布というプロセスを経るため，全過程にわたる計算精度を，解析解との比較から定量的に求めることはできない。あくまでも水分分布のプロットによる定性的な比較にとどまるが，Δz，Δtをこれ以上縮減しても，図－14より正確性が飛躍的に改善される傾向は見当らない。その点で，$\Delta z=1.0$cm，$\Delta t=15$秒という刻みは，マサ土中の水の再分布と貯留というプロセスを，安定的にかつ正確性と効率性のバランスを保ちながら計算をすすめるのに適した条件といえる。

以上のように，土中の水分移動解析に関してNewton法を適用することは，浸潤現象については線形反復法と変わりない結果を示すものの，その後の乾燥，再分布，排水（貯留）には，線形反復法よりもはるかに安定で精度のよい演算を保証するものである。

5．おわりに

ここまで，表面からの降下浸潤現象と下層での貯留現象に対し，線形反復法とNewton法を用いて，差分法により数値計算を行なってきた。ここではこれまでの検討結果を改めて整理したい。

先ず降下浸潤に関しては，線形反復法，Newton法のいずれも誤差が大きく，これは計算刻みを小さくとってもあまり減少しなかった。また両計算方法に本質的な精度の違いは認められない。いずれにしても，これらの誤差のほとんどは浸潤開始直後に生じており，前線付近の含水率の急激かつ瞬間的な変化を数値計算によって正確に表現することが難しいことを表している。

一方で，下層における貯留現象に関しては，線形反復法により差分刻みを安易に小さくした際，丸め誤差が集積し，事実上，数値計算としての意味をなさない事例も見られた。この誤差集積が線形反復法のアルゴリズムに本質的に起因するものであるか，マサ土を対象とする実験式，計算条件から偶々派生したものであるのか，今回，十分には追求できなかった。

他方で，飽和領域を含む貯留現象については，Newton法の優位性が如実に示された。ただしNewton法を用いる場合，(13)式で表されるマスバランスF_iのψ_{i-1}，ψ_i，ψ_{i+1}に関する偏微分を求め，（15）式のJacobi行列を予め定めておく必要がある。これはいささか面倒な手続きである。その点で，線形反復法は簡潔かつ理解しやすいという利点を備えている。いずれにしても，飽和領域を含む事例に線形反復法を採用するときは，計算精度と効率性の両面から最適の差分刻み値を予め求めておく必要がある。

土中の水分移動解析は，近年，大型計算機を用いて，その対象を二次元から三次元へと広げながら，しかも複雑な斜面形状や不均質土層，さらにはヒステリシスを考慮に入れたものまで広く展開されてきている。この場合，計算値の精度，再現性の良否を実測値との比較により検討することは困難であり，まして解析解を求めてこれを行なうことは不可能である。

このような観点から，本研究において行なった，解析解の明らかな2つの一次元水分移動現象に関する数値解の安定性と精度のチェックは，重要な意義をもつものと思われる。すなわち，二次元，三次元の複雑な境界条件を有する解析であっても，その計算スキームの適否と差分間隔の最適値を事前に策定するには，先ず一次元問題に立ち返り，線形反復法とNewton法の長短も考慮に入れながら検討を加える必要がある。

三次元の解析をすすめる過程で，土の水分状態とそこに引き起こされる水分フラックスを把握し，その多少に応じてΔtとΔx，Δy，Δzの関係を，計算効率の点も考慮しながら随時調整し，全体的な演算誤差を定量的に評価しうるようなプログラムの開発が，今後の課題として残されているといえるだろう。

おわりに，本研究をすすめるに当たり，岩手大学農業土木システム学研究室の専攻生諸君の多大なる協力を得た。ここに記して謝意を表する。なお計算には，岩手大学情報処理センターのHITAC M680/160Eを用い，単精度演算にて処理した。

引用文献

1）Campbell,G.S.：Soil physics with BASIC,pp.73～97,Elsevier（1985）
2）Syring,K.M.and K.C.Kersebaum：Simulation

of the one－dimensional water transport,pp. 30～46,In：J.Richter (ed.) Models for processes in the soil,Catena (1990)

3）Hanks,R.J.：Infiltration and redistribution,pp. 181～204,In：R.J.Hanks et al. (ed.) Modeling plant and soil systems,Amer.Soc.of Agron. Monograph 31 (1991)

4）Skaggs,R.W.：Drainage,pp.205～243,In R.J. Hanks et al. (ed.) Modeling plant and soil systems,Amer.Soc.of Agron.Monograph 31 (1991)

5）登坂宣好・大西和榮：偏微分方程式の数値シミュレーション,pp.158～161,東京大学出版会（1991）

6）Van Genuchten,M.Th.：A closed－form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils,Soil Sci.Soc.Am.J,44,pp.892～898 (1980)

7）宮崎毅：斜面中の水移動,土壌の物理性,49,pp.40～47（1984）

8）Philip,J.R.：Theory of infiltration,pp.216～291,In：V.T.Chow (ed.) Advances in hydroscience,vol.5,Academic Press (1969)

9）Huyakorn,P.S.and G.F.Pinder：Computational methods in subsurface flow,（赤井（監訳），地下水解析の基礎と応用,下巻, pp.403～419,現代工学社,（1988））

10）前掲1）のpp.89～90

11）Haverkamp,R.and M.Vauclin：A note on estimating finite interbloc hydraulic conductivity values for transient unsaturated flow problems, Water Resour.Res.,15,pp.180～187 (1979)

12）伊理正夫・藤野和建：数値計算の常識,pp.52～58,共立出版（1985）

（受稿年月日　1993年6月18日）