J. Jpn. Soc. Soil Phys.
土壌の物理性
No. 96, p. 57～63（2004）

エクセルを使った逆解析法による土壌水理特性の推定

登　尾　浩　助*

Numerical inverse procedure to estimate soil hydraulic properties using Excel

Kosuke NOBORIO*

* Faculty of Agriculture, Iwate University, 3-18-8 Ueda, Morioka, Iwate 020-8550, Japan

Abstract

There is a big demand to predict water movement and solute transport in soil not only in agricultural but also in environmental fields. To predict water distribution in soil, soil hydraulic properties, i.e. a water characteristic curve and hydraulic conductivity, should be known in priori. Measurement of soil hydraulic properties, however, is usually time consuming and laborious work. Recent improvements of computing power on PC enabled us to inversely estimate hydraulic properties using a numerical simulation model along with experimental data. Spreadsheet-type software, which has a macro language and a solver, is also popular. In this study Excel was used to numerically simulate soil water movement using the finite difference method written in Visual BASIC as a macro function. The solver function of Excel successfully worked with the numerical model to estimate best-fitted values for soil hydraulic properties by comparing simulated results with temporal changes in soil water content measured. The temporal changes in water content were measured with time domain reflectometry (TDR) at 20 cm below the soil surface during water infiltration into loamy sand. A water characteristic curve with parameters inversely estimated reasonably agreed with that with parameters experimentally determined. Saturated hydraulic conductivity inversely estimated also agreed well with that determined by an experiment. Excel would be alternative software to estimate soil hydraulic properties with an inverse procedure.

Key words : infiltration, hydraulic conductivity, water characteristic curve, finite difference method (FDM), time domain reflectometry (TDR)

1.　はじめに

土壌中における水分移動とそれに伴う溶質移動を予測することは，農業ばかりでなく環境の方面からも極めて重要である。土壌中における水分移動を予測するには，さまざまな土壌に固有の水理特性（水分特性曲線と透水係数）をあらかじめ知っておく必要がある。ところが，土壌水理特性の測定には手間と時間が掛かるのが一般的である。

近年のパーソナルコンピュータの発達と共に注目されている手法に逆解析法がある。逆解析法では，たとえば土壌水分量の時間的変化を測定し，シミュレーションモデルによる計算値と測定値の差が最小になるような土壌水理特性値を推定する。Simunek ら（1998）は Hydrus_1D と呼ばれる有限要素法によるシミュレーションモデルを使って土壌中における水分移動の逆解析を行い，土壌水理特性の推定に成功した。しかし，Hydrus_1D は実行型のアプリケーションプログラムとして市販されているので，利用者の状況にあわせて容易にモデルを改変することが困難である。

一方，エクセルのようなスプレッドシート型のソフトウェアは広く普及している上に，マクロ言語を使った数値計算やソルバー機能による非線形最小 2 乗当てはめ計算（即ち，逆解析）が可能である。Wraith と Or（1998）

* 岩手大学農学部　〒020-8550 盛岡市上田 3-18-8
キーワード : 浸潤，透水係数，水分特性曲線，差分法，TDR 法

は，ソルバー機能を使って定常な水分フラックスの元での移流 - 拡散方程式の解析解に対する分散係数と遅延係数を推定する方法を紹介した。同様に土壌水理特性もスプレッドシート型のソフトウェアを使って逆解析法によって推定できれば，非常に有用であると思われる。しかし，複雑な初期・境界条件下での水分移動や溶質移動に対しては，簡単に適用できる解析解が見つかっていないのが実情である。このような場合には，スプレッドシート型ソフトウェアに付属しているマクロ言語を使って数値計算により移動方程式を解かなければならない。その際，組み込まれているソルバー機能が適切に動作するかどうかを調査する必要がある。

本研究では，エクセルのマクロ機能とソルバー機能を使って土壌水分浸潤実験結果に逆解析法を適用することにより，土壌水理特性値の推定が可能であったので報告する。

2. 実 験 方 法

(1) 数値計算

1次元鉛直方向の土壌中における水分移動はリチャーズ式によって表される（Simunek ら，1998)。

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial z}\left(-K\frac{\partial h}{\partial z}-K\right) \tag{1}$$

ここに，θ は体積含水率（m^3/m^3），h はマトリックポテンシャル（m），K は透水係数（m / min），t は時間 (min)，z は地表面からの深さ（m）である。また，土壌水理特性は式(2)(3)のような van Genuchten 式で表される（van Genuchten, 1980)。

$$\Theta(h)=\frac{1}{(1+|\alpha h|^{n})^{m}} \tag{2}$$

$$K(\theta)=K_s\Theta^{0.5}[1-(1-\Theta^{1/m})^m]^2 \tag{3}$$

ここに，Θ は $\Theta=(\theta-\theta_r)/(\theta_s-\theta_r)$ で表される有効飽和度，θ_s は飽和体積含水率（m^3/m^3），θ_r は残留体積含水率 (m^3/m^3)，K_s は飽和透水係数（m/min），$\alpha, n, m=1-1/n$ は実験定数である。式(1)を前進差分方程式に展開すると，

$$\theta_i^{t+\Delta t}=\theta_i^t+\frac{\Delta t}{\Delta z}\left[\bar{K}_i\left(\frac{h_{i-1}-h_i}{\Delta z}+1\right)-\bar{K}_{i+1}\left(\frac{h_i-h_{i+1}}{\Delta z}+1\right)\right] \tag{4}$$

となる。ここに，$\theta_i^{t+\Delta t}$ は節点 i における Δt 時間後の体積含水率（m^3/m^3），θ_i^t は節点 i における現在の体積含水率 (m^3/m^3)，Δt は計算時間間隔 (min)，Δz は節点間距離（m），h_{i-1}, h_i, h_{i+1} はそれぞれ節点 $i-1, i, i+1$ における圧力水頭（m），$\bar{K}_i$ は節点 $i-1$ と i 間におけるまた $\bar{K}_{i+1}$ は節点 i と $i+1$ 間における平均透水係数（m/min）である。平均透水係数は，

$$\bar{K}_i=K\left(\sqrt{\theta_{i-1}\theta_i}\right) \tag{5}$$

と表した。

(2) 逆解析

差分方程式（式(4)）を解くプログラムは，エクセルのマクロ言語である Visual BASIC で記述した。逆解析法では，ある深さで経時的に測定した体積含水率と式(4)を使って計算した体積含水率の差の2乗を全測定時間に対して合計した値が最小となるように土壌水理特性値 α, n, K_s を同定した。この同定にはエクセルに組み込まれているソルバー機能を利用した。

逆解析用のプログラムは，土壌水理特性値である α, n, K_s を引数とした利用者定義関数（ファンクション）として，エクセルのマクロ機能の Visual Basic Editor から標準モジュールを挿入して記述した。この関数を“watermove”という名前で定義した。参考までに使用したプログラムを付録-1に示す。プログラムでは，先ず，θ の初期値である θ_{int} および θ_s と θ_r の値をワークシートのセル G2, G3, G4 にそれぞれ与え，関数“watermove”からこれらのセルを指定して読み込んだ（例えば，G2 セルからの値の読み込みには，theta_i＝ActiveSheet. Range(“G2”). Value と書いて, theta_i に G2 セルの値を入力する。一方余談であるが，マクロからワークシートに計算値を引き渡すときには, ActiveSheet. Range(“G2”). Value＝theta_i とすれば，theta_i に格納されている計算値をワークシートの G2 セルに書き出すことができる)。さらに関数“watermove”は，水分移動の計算が進むにつれて，あらかじめワークシートの E 列に発生順に入力しておいた含水率の測定値を，測定時刻と計算時刻が同一になった時に順次これらのセルから読み込んだ。続いて関数“watermove”は，各測定時刻における測定値と計算値の差の2乗を計算し，全測定時間に対するこれらの差の2乗を累加した。この累加2乗誤差を関数“watermove”の値としてワークシートに返す。本研究では，ワークシートのセル番号 G65 に“＝watermove(C2, C3, C5)”と書いて関数“watermove”を呼んでいるので，セル番号 G65 に累加2乗誤差の値が転記される。引数として参照されるセル C2, C3, C5 には，最適化すべき α, n, K_s の初期値をそれぞれ与えてから，ソルバーを作動させた。

図-1にソルバーの設定画面を示す。ソルバーは，セル G65 に転記された累加2乗誤差の最小値を探すためにセル C2, C3, C5 に与えられている α, n, K_s の値を色々変え

て，引数として再び関数“watermove”に引き渡し，新たな累加2乗誤差が計算されるまで待機する。測定値と計算値の累加2乗誤差がもっとも小さくなるようなα, n, K_sが求める水理特性値である。

数値計算を行う際の初期条件は，計算対象とする土壌カラム全体に水分が含水率θ_{int}（m^3/m^3）で一様に分布していると仮定した。また，土壌カラム上端（z＝0 cm）における境界条件は，計算開始から1.0 cmの湛水深（h＝1.0 cm）を保った状態とした。一方，土壌カラム下端（$z=L$ cm）における境界条件は，半無限長のカラムを想定して$\partial h/\partial z=0$とした。すなわちこの数値計算は，水分がカラム下端に到達するまでの間においてのみ有効である。したがって，深度20 cmにおける含水率の経時変化を十分に計算できるように計算カラム長さをL＝30.0 cmとした（表–1）。

α, n, K_sの初期値は，砂質土に対してはそれぞれ0.1（1/cm），1.8，0.1（cm/min）とし，壌砂土に対してはそれぞれ0.1（1/cm），1.4，0.1（cm/min）とした。また，α, n, K_sの下限値は，それぞれ0.01（1/cm），1.1，0（cm/min）とし，上限値は設定しなかった。

計算には，1Gbite RAMと30 Gbite空き容量のある固定ディスクおよびPentium4 2.53 GHz CPUを搭載したPCを使った。OSにはWindows 2000を，また，表計算ソフトにはExcel 2000使用した。

(3) 水分浸潤実験

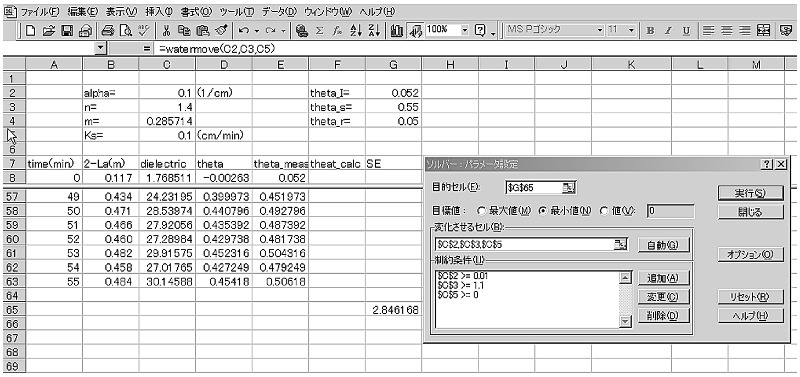
i.　数値実験

水理特性が既知である砂質土を充塡した1次元鉛直カラムを想定した。計算には，表–1に示されるカラム長と初期・境界条件を使った。本数値実験では，θ_{int}，θ_sおよびθ_rの値は既知と考えた。また，表–2に示されるような土壌水理特性の砂質土を想定した。カラム実験に倣って，地表面から20 cmの深さにおいて計算された含水率の経時変化を1分間隔で記録した。逆解析では，この計算で得られた含水率の経時変化が実測値であると仮定した。

ii.　カラム実験

実験には，岩手大学下台圃場の壌砂土を風乾後，2 mmフルイを通過した試料を使用した。2 mmフルイ通過後のかく乱試料を塩化ビニール製カラム（直径10 cm, 長さ26 cm）に乾燥密度が均一になるように充塡した。その結果，乾燥密度は1.01 Mg/m^3となった。また，風乾時の体積含水率は0.052（m^3/m^3）であった。本カラム実験では，風乾時の体積含水率をθ_{int}と仮定し，実験終了時におけるTDR法による測定値をθ_sとした（表–1）。θ_rの値はθ_{int}の時にΘがゼロとならない適当な値を与えた。

地表面において1 cmの湛水深となるようにマリオッ



図–1　エクセルのソルバー機能

Fig. 1　The solver function of Excel.

表–1　陽解差分法による数値計算の計算条件

Table 1　Calculating conditions for numerical simulation using the explicit finite difference method

	カラム長さ L(cm)	計算時間間隔 Δt(min)	節点距離 Δz(cm)	飽和含水率 θ_s(m^3/m^3)	残留含水率 θ_r(m^3/m^3)	初期含水率 θ_{int}(m^3/m^3)	境界条件 カラム上端	境界条件 カラム下端
砂質土	30.0	0.001	0.5	0.40	0.05	0.06	$h=1.0$ cm	$\partial h/\partial z=0$
壌砂土	30.0	0.001	0.5	0.55	0.05	0.052	$h=1.0$ cm	$\partial h/\partial z=0$

表-2　既知値と実験値に対する土壌水理特性の逆解析値

Table 2　Known and experimental values for soil hydraulic properties and inversely-analyzed values

	既知値（実験値）			逆解析値		
	α（1/m）	n	K_s（m/min）	α（1/m）	n	K_s（m/min）
砂質土（数値実験）	12.4	2.28	2.43×10^{-3}	14.4	2.50	2.57×10^{-3}
壌砂土（カラム実験）	4.46	1.39	1.14×10^{-3}	6.54	2.03	1.26×10^{-3}

ト装置を調整して浸潤実験を開始した。その際，地表面から 20 cm の深さに 2 線式 TDR プローブ（棒直径 1.6 mm，棒間隔 1.5 cm，長さ 8.6 cm）を水平方向に挿入して体積含水率の変化を 1 分毎に測定した。TDR 測定装置には，テクトロニクス社製ケーブルテスター（モデル 1502C）を使用した。また，ケーブルテスターの制御と波形解析には登尾ら（1997）が紹介したコンピュータプログラムを使用した。TDR 法による土壌水分量の測定に関しては登尾（2003）に詳しいので参照されたい。

浸潤実験の最後に，土壌カラムの底から十分な量の水を流下させた後，カラム全体を水で満たしたバケツに浸し，湛水深を保ったまま 1 週間放置した。その後，定水位法により飽和透水係数を測定した。

また，別の試料を使って吸引法と遠心法によりマトリックポテンシャルと含水率の関係を得た。得られた関係に式(2)で示される van Genuchten 式を当てはめて，表-2 に示される結果を得た。

3.　結果と考察

i.　数値実験

図-2 には 20 cm 深度で測定した含水率の経時変化と逆解析によって曲線当てはめされた含水率の変化が示される。経過時間 18 分頃に起きた浸潤前線の到達を始め経時的な含水率の変化は，測定値と計算値の両者において極めて良好に一致した。

次に，既知値である α, n, K_s と逆解析によって推定した α, n, K_s の比較を表-2 に示す。どの係数も良く一致していることがわかる。さらに，これらの係数を使って水分特性曲線のグラフを描いて比較したのが図-3 である。このグラフからも逆解析によって推定した水理特性値が妥当であることがわかる。

ii.　カラム実験

図-4 には TDR 法で測定した含水率の経時変化と逆解析によって曲線当てはめをした含水率の経時変化を示す。両者は浸潤前線の到着時間とそれによって引き起こされる急激な含水率の変化，そしてその後の緩慢な含水率の変化具合まで非常によく一致している。

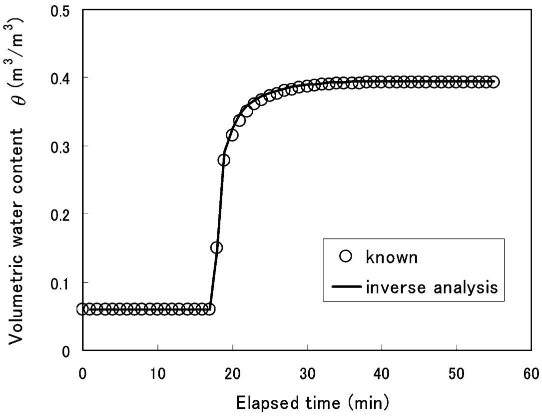
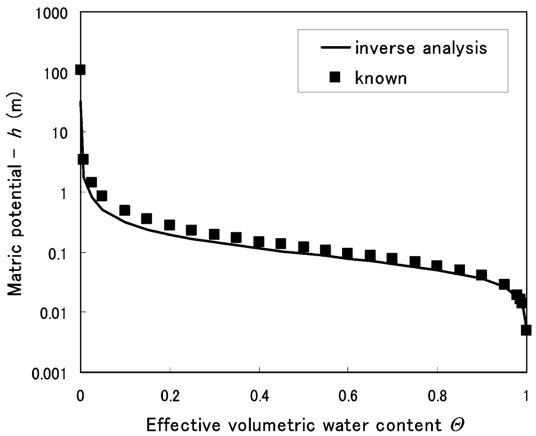


図-2　砂質土の水分浸潤数値実験における 20 cm 深度での含水率の経時変化．○印は数値実験値，実線は逆解析により求めた水理特性を使った計算値．

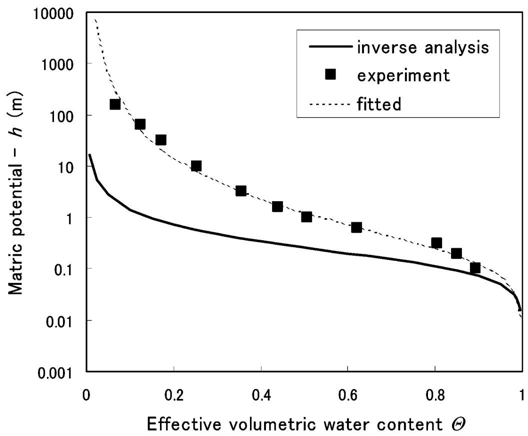
Fig. 2　Temporal changes in volumetric water content at 20 cm deep in a sandy soil. Open circles represent values determined by a numerical experiment, and a solid line represents simulation results using hydraulic properties estimated by an inverse analysis.

図-5 には逆解析により最適化した水理特性値を使って描いた水分特性曲線と室内実験により決定した水分特性曲線を示す。高水分域では両者は比較的良く一致しているが，中〜低水分域では約 10〜100 倍程度実験値の方が大きくなっている。これは，低水分域における含水率の経時変化の測定データが不足しているために，適切な逆解析ができないことに起因するのではないかと考えられる。一方，前述の数値実験の結果から，本逆解析法は十分な精度を持つと考えられることと，図-4 の結果から 20 cm 深度における逆解析による当てはめは妥当であると考えられるので，吸引法・遠心法の際に起きたと考えられる実験試料の充塡の乱れ等による誤差が要因となっ



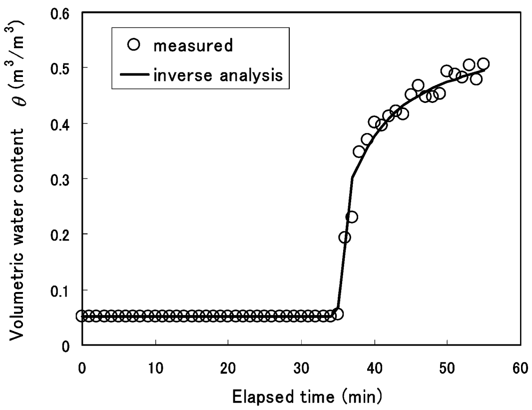
図–3　砂質土に対する水分特性曲線の比較．■印は既知の値，実線は逆解析による値．

Fig. 3　Comparison of water characteristic curves for a sandy soil between known values and values estimated by an inverse analysis. Solid squares represent experimental values, and a solid line represents values estimated by an inverse analysis.



図–5　壌砂土に対する水分特性曲線の比較．■印は実験値，破線は実験値の van Genuchten 式への当てはめ，実線は逆解析による値．

Fig. 5　Comparison of water characteristic curves for loamy sand between experimental values and values estimated by an inverse analysis. Solid squares represent experimental values, a dotted line represents curve fitted to the van Genuchten equation with the experimental values, and a solid line represents values estimated by an inverse analysis.



図–4　壌砂土の水分浸潤実験における 20cm 深度での含水率の経時変化．○印はカラム実験値，実線は逆解析により求めた水理特性を使った計算値．

Fig. 4　Temporal changes in volumetric water content at 20 cm deep in loamy sand. Open circles represent values determined a column experiment, and a solid line represents simulation results using hydraulic properties estimated by an inverse analysis.

ているのではないかとも判断される。

表–2 では逆解析により推定した水理特性値 α, n, K_s と実験室内で測定した係数を比較した。逆解析値は実験値に比べて，α と n を約 1.5 倍大きく推定した。一方，飽和透水係数 K_s に対しては逆解析値と実験値が良く一致した。

実験によって求めた水理特性値 α, n, K_s（表–2 を参照）を使って計算した 20 cm 深度における含水率の経時変化と TDR 法により測定した含水率の経時変化を図–6 に示す。計算の方が実測よりも約 4 分早く浸潤前線が到達している。図–4 と図–6 を比較すると，20 cm 深度において TDR 法によって測定した含水率の経時変化を適切に再現しているのは，逆解析法によって推定した土壌水理特性値であると判断しても良さそうである。

4.　ま と め

エクセルを使った逆解析法による土壌水理特性の推定法を紹介し，本法が有効であることがわかった。浸潤実験においてある深度における含水率の経時変化のみが測定値として必要なデータである。したがって，TDR 法などを使って自動計測を行うことにより作業の手間が省け

ると思われる。本法では，土壌水分移動の数値計算には差分方程式を陽解法で解いているために，計算時間間隔と節点間距離を大きく取れない制約がある。したがって，計算に要する時間が非常に長い（1ケースにつき3〜5時間程度）という欠点がある。水分移動の数値計算にキャンベル（1987）が紹介したようなクランク・ニコルソン法を使うことにより，計算時間間隔と節点間距離を大きくして計算時間の短縮を図ることが今後の課題である。さらに，含水率の経時変化を使った逆解析法が，唯一の α, n, K_s 値を推定するのかどうかや低〜中水分域の測定点の不足が逆解析結果にどのような影響を与えるかなどを検討する必要がある。

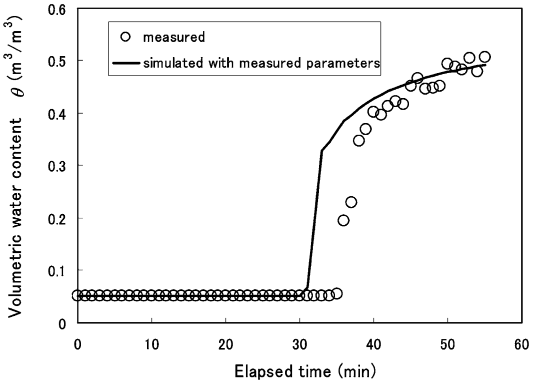


図-6　壌砂土の水分浸潤実験における20 cm深度での含水率の経時変化．○印はカラム実験値，実線は実験によって得られた水理特性（表-2参照）を使った計算値．

Fig. 6　Temporal changes in volumetric water content at 20 cm deep in loamy sand. Open circles represent values measured with a column experiment, and a solid line represents simulated values with hydraulic properties determined by laboratory experiments (see Table 2).

引　用　文　献

キャンベル・ゲイロン（中野・東山監訳）（1987）：パソコンで学ぶ土の物理学［自然環境管理の基礎］．鹿島出版会．

登尾浩助（2003）：実践TDR法活用—土壌中の水分・塩分量の同時測定—．土壌の物理性，**93**：57–65，**95**：94．

登尾浩助・K.J. マクイネス・J.L. ハイルマン（1997）：コンピュータ制御による多点化TDRシステムの試作と応用．農土論集，**188**：129–135．

Simunek, J., O. Wendroth and M. Th. van Genuchten (1998) : Parameter estimation analysis of the evaporation method for determining soil hydraulic properties. Soil Sci. Soc. Am. J., **62** : 894–905.

van Genuchten, M. Th (1980) : A closed form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. Soil Sci. Soc. Am. J., **44** : 892–898.

Wraith, J.M. and D. Or. (1998) : Nonlinear parameter estimation using spreadsheet software. J. Nat. Resour. Life Sci. Educ., **27** : 13–19.

受稿年月日：2003年 9 月 1 日
受理年月日：2003年12月 3 日

付録-1　関数“watermove”のプログラムリストと説明

Appendix 1　Computer program list and explanation for the function “watermove”

```
Function watermove(alpha, n, Ks)   } α,n,Ksを引数にした関数"watermove"の定義

Dim z(100), zg(100), th(100), h(100)

theta_i = ActiveSheet.Range("G2").Value
theta_s = ActiveSheet.Range("G3").Value   } ワークシートから変数の読み込
theta_r = ActiveSheet.Range("G4").Value

Nlayer = 61
dz = 0.5
dt = 0.001
Tsteps = 55# / dt - 2                     } 計算条件の設定
dtout = 1#
m = 1 - 1 / n
```

初期値設定

```
' initialize parameters
z(0) = 0
For i = 1 To Nlayer + 1
  z(i) = (i - 1) * dz
  zg(i) = -z(i)
  th(i) = theta_i
  h(i) = head(theta_i, alpha, theta_s, theta_r, n, m)
Next I
```

表面における境界条件の設定

```
'surface boundary condition (cm)
h(1) = 1#
```

陽解差分法

```
Jout = 0
t = 0
tout = 0
SSE = 0
For j = 1 To Tsteps
  t = j * dt
  For i = 1 To Nlayer
    Jin = Jout
    If i = Nlayer Then
      Jout = Jin
      Else
      avethe = (vgth(h(i), alpha, theta_s, theta_r, n, m) * vgth(h(i + 1), alpha,
theta_s, theta_r, n, m)) ^ 0.5
      KK = K(avethe, Ks, theta_s, theta_r, m)
      Jout = flux(h(i), h(i + 1), z(i), z(i + 1), zg(i), zg(i + 1), KK)
    End If
    If i = 1 Then
      th(i) = vgth(h(1), alpha, theta_s, theta_r, n, m)
      Else
      th(i) = th(i) - (Jin - Jout) * dt / ((z(i - 1) - z(i + 1)) * 0.5)
    End If
   If th(i) > theta_s Then th(i) = theta_s
    h(i) = head(th(i), alpha, theta_s, theta_r, n, m)

  Next i
```

ワークシートから測定値の読み込み

```
  If t >= tout Then
    num$ = Right$(Str$(tout + 9), Len(Str$(tout + 9)) - 1)
    the_obs = ActiveSheet.Range("E" + num$).Value
    SE = (the_obs - th(41)) ^ 2
    SSE = SSE + SE
    tout = tout + dtout
  End If
Next j
watermove = SSE
```

関数"watermove"の答えとして累加2乗誤差SSEを返す

```
End Function
```

$K(\theta)$関数の定義

```
Function K(theta, Ks, theta_s, theta_r, m)
  rel_th = (theta - theta_r) / (theta_s - theta_r)
  K = Ks * (rel_th) ^ 0.5 * (1 - (1 - rel_th ^ (1 / m))) ^ 2
End Function
```

$\theta(h)$関数(hからθへの変換)の定義

```
Function vgth(h, alpha, theta_s, theta_r, n, m)
  If h >= 0 Then
   vgth = theta_s
   Else
   vgth = (theta_s - theta_r) * (1 / (1 + (alpha * Abs(h)) ^ n)) ^ m + theta_r
  End If
End Function
```

$h(\theta)$関数(θからhへの変換)の定義

```
Function head(theta, alpha, theta_s, theta_r, n, m)
  rel_th = (theta - theta_r) / (theta_s - theta_r)
  If theta >= theta_s Then
   head = 0
   Else
   head = -1 * (1 / alpha * (1 / rel_th ^ (1 / m) - 1) ^ (1 / n))
  End If
End Function
```

水分フラックスを計算する関数の定義

```
Function flux(h1, h2, z1, z2, zg1, zg2, K)
  flux = -1 * K * ((h1 + zg1) - (h2 + zg2)) / (z1 - z2)
End Function
```