J. Jpn. Soc. Soil Phys.
土壌の物理性
No. 104, p. 127～139（2006）

古典を読む

E.E. Miller and R.D. Miller 著「毛管流現象のための物理理論」

宮　﨑　　毅*

Reviewing classical studies in soil physics
"Physical Theory for Capillary Flow Phenomena"
By E.E. Miller and R.D. Miller
Journal of Applied Physics, 27 (4) : 324–332 (1956)

Tsuyoshi MIYAZAKI

* The University of Tokyo, Graduate School of Agricultural and Life Sciences, Department of Biological and Environmental Engineering, Yayoi 1-1-1, Bunkyo-ku, Tokyo 113-8657, Japan

1.　はじめに―相似モデル誕生の背景―

1950年代は，生粋の物理学者が土壌物理学に登場し，次々と問題を解決した輝かしい時代であった。とはいえ，それは「第2次世界大戦が終了して，理工学分野の人材の必要性が激減し，優秀な科学者や技術者が軍事産業から平和産業へとあふれ出たために，それらの人材の一部が農学などの応用分野に流出したためである」との通説があり，筆者もそれを信じている。少なくとも，J.R. Philip，W.R. Gardner，G.I. Taylor そして本論文の著者 E.E. Miller and R.D. Miller 兄弟が大活躍したのはこの時代であり，Philip に至っては 1957 年 1 年間だけで，少なくとも 11 編の論文を世に送り出している。

ウィスコンシン大学の物理学者 E.E. Miller は，弟のコーネル大学土壌物理学者 R.D. Miller の研究に興味を抱いていた。あるとき，兄は「土の種類によって浸潤強度が著しく異なる」とする弟の研究発表に注目した。2人は「粒径の粗い土への浸潤の初期過程は，粒径の細かい土への浸潤の後期過程とよく似ている」ことを議論した。その後，幾多の議論とエキサイティングな着想を重ねて，この兄弟は，土の相似則に到達したという（Miller, 1990）。

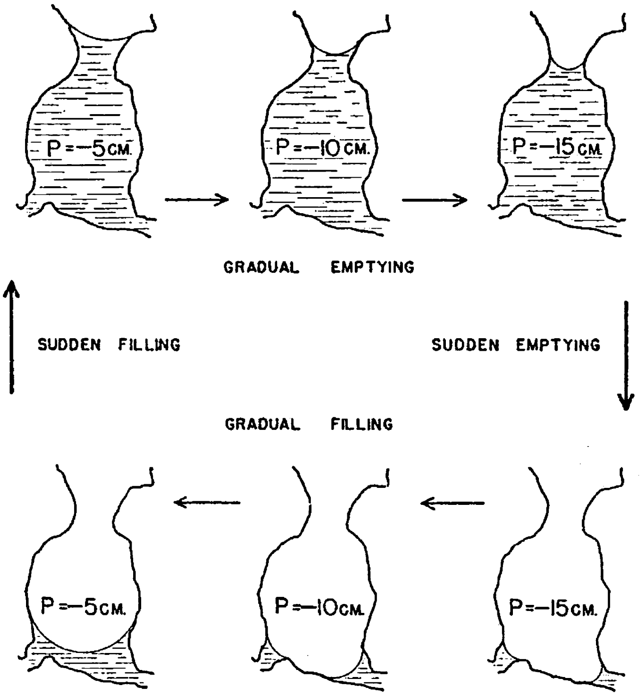
Miller and Miller 兄弟は，1955 年に Soil Science Society of America Proceedings において2編の論文 Theory of Capillary Flow : Ⅰ. Practical Implications と Theory of Capillary Flow : Ⅱ. Experimental Information を発表し，多孔質体における間隙サイズの特性長（characteristic pore size）概念と，相似（similar media）概念とを提示した（Miller and Miller, 1955a, 1955 b)。しかし，これらの概念が広く知られたのは，翌年 Journal of Applied Physics に掲載された論文 Physical Theory for Capillary Flow Phenomena によるものだった（Miller and Miller, 1956)。前年の 2 編の論文はやや回りくどくて，読みづらい面があったが，後者の論文は理論的な完成度が高く，その後の土壌物理研究に多大な影響を及ぼしたので，本企画がいう“古典”と呼ぶに相応しい。

Miller and Miller は，毛管流現象として 2 つの事項を重視した。第 1 は不飽和土壌の保水特性におけるヒステリシス現象であり，第 2 が粒子径の異なる土壌間の相似性であった。その後の展開において，ヒステリシス論の方はあまり深化せず，注目もされず，もっぱら相似概念が重視されたが，本稿では，原典に忠実に従い，ヒステリシス概念の提示の仕方を見，相似概念の発案とその後の経緯を追うこととし，古典を味わってみたい。

2.　Miller and Miller のヒステリシス概念

図–1 は，間隙内の水について，同じマトリックポテンシャルにおいて複数の水分状態が存在しうることを概念的に示したものである。たとえば，－5 cm の圧力（負

* 東京大学大学院農学生命科学研究科，生物・環境工学専攻　東京都文京区弥生 1-1-1
キーワード : 相似多孔質体，特性長，水分特性曲線，ヒステリシス，非相似多孔質体



図–1　気液境界面の形状は，圧力差異だけでなく，その圧力の履歴によっても定められる。

Fig. 1　The shape of the gas-liquid interface is determined not only by the differential pressure but also by the previous history of this pressure.

圧）で平衡している水が，図の左上に示されている。次に，右へ向かって徐々に圧力が低下し，同時に水分量が減少してメニスカス半径が小さくなり，やがて−15 cm の圧力に至る。このとき，突然，大きい間隙中の水が排除されて，小さい間隙中の水だけが残されたとして，その水のメニスカス半径が，−15 cm の負圧と平衡するものであれば，結局この圧力において，右上と右下に示された2つの水分状態が存在可能であるとしている。次に，右下の図から左へ向かって，小さい間隙中の水が増えていき，それに伴ってメニスカス半径が増加していき，やがて−5 cm の圧力まで回復する。このとき，突然外部から水が浸入して大きな間隙を満たしたとし，そのときのメニスカス半径がやはり−5 cm の負圧と平衡する値であるとき，ここでも同一圧力において2つの水分状態が可能である。

このように，同一の負圧でひとつの間隙が突然水で満たされたり，逆に満たされていた水が突然排除されたりする過程は，Hines (1930) の論文中で初めてジャンプと表現され，それ以降このような水分変化をハイネスジャンプ（Haines jump）と呼ぶようになった。後に，E.E. Miller (1980) は，これを不可逆的ハイネスジャンプである，と補足している。

以上の概念は，確かにヒステリシス現象をモデル的に描き出しているが，本文には「ポアソン方程式が curled up されるとき，その解は単一ではない。それには，解が同時に2つ存在する例を示せば十分であり，図–1 にそれが示されている。」（意訳）とのみ記述しており，残念ながら筆者の理解が及ばない。むしろ，ケンブリッジ大学のキャベンディッシュ物理学Ⅰに紹介された毛細管現象に関する演習問題（キャベンディッシュ研究所・ピパード，1968）において，毛管上昇高の解が2つあることを証明した記述のほうが分かりやすい。この演習問題では，上方に向かってわずかに管径が減少するような毛管を自由水面に立てると，安定した毛管上昇の解以外に，どんな長さの毛管であっても必ずその上端まで水が達するような別の解が存在することを証明しており，興味が尽きない。

3.　マクロな流れの基礎式

原著論文では，続く議論として，ナヴィエ–ストークス方程式からダルシー則が導かれるという，議論し尽くされてきた説明に紙面を費やしているが，ここは思い切っ

て割愛する。

ただし，この議論の中で，Miller and Miller は，土粒子と水の境界面における流速と，水と空気の境界面における流速を，共に限りなく 0 に近いという仮定を与えた。固体と水の境界面で流速を 0 とすることには馴染みがあるが，水と空気の境界面における流速も 0 とすることには，やや抵抗を覚える。なぜなら，筆者は，乾燥したガラス粒子に浸潤する水の浸潤前線をミクロスコープで観察したことがあり，そこでは間隙水の気液界面が複雑な凹凸曲面を形成し，かつその曲面上の水膜が激しく移動していた。この膜状移動は，凸面上の水が凹面上の窪みに向かっているように見えた。この経験に照らすと，多孔質体中の不飽和な膜状水が空気との境界面で静止しているとは，とても考えられないからである。読者諸氏はどうお考えであろうか？

4.　Miller and Miller の相似概念

4.1　相似媒体と特性長

有名な相似理論は，こうした難解な前座を読み終わった読者に提示されるが，多くの後続研究者たちは，前座を読み飛ばし，次に登場する相似理論に直接飛びついたと考えてよいだろう。かくいう筆者もその一人である。

さて，その相似理論は，図-2 のような幾何学形状で示された。これら 2 つの媒体は相似媒体（similar media），また，λ_1 と λ_2 は特性長（characteristic length），とそれぞれ命名された。ここで，Miller and Miller は「2 つの媒体のミクロ形状全てについて，相似状態が実現する確率はゼロである」が，「マクロな量を比較するためだけにその（相似という）性質を利用するのであるから，ミクロな量において統計的に等価な基準もまた有効性を持つに違いない（直訳）」と示唆しているが，分かり難い。意訳してみると，「ミクロに完全な相似形状を仮定したとき，マクロな結果を得ることができる」こと，および「統計的に等価な基準を用いても，同じようにマクロな結果を得ることができる」ことを主張しているようである。

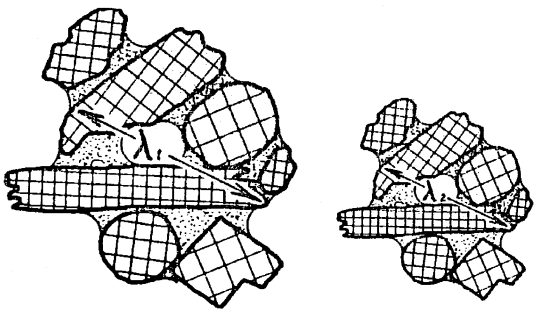


図-2　2 つの相似状態にある相似媒体の概念図。特性長 λ_1 と λ_2 は，それぞれの対応する点を結んでいることに注意を要する。

Fig. 2　Illustration of two "similar media" in "similar states." Note that the two characteristic lengths, λ_1 and λ_2, connect corresponding points in the two media.

ということは，マクロな量の比較からミクロな相似を決める数値（たとえば λ_1 と λ_2 の値の比など）を求めるといったような論理は，Miller and Miller の原典では求めていないのである。ところが後に，ある土の特性長 λ と，仮想的な基準土壌の特性長 $\langle\lambda\rangle$ の比 $\lambda/\langle\lambda\rangle$ がスケーリングファクター（α）と命名されて以降，ミクロな相似という前提条件を無視してマクロな量の比較を行い，パラメータ α を求めて利用する手法が広く流布した（Peck *et al.,* 1977 ; Warrick *et al.,* 1977 ; Warrick and Amoozegar-Fard, 1979 ; Sharma and Luxmoore, 1979 ; Simmons *et al.,* 1979 ; Russo and Bresler, 1980）。このとき同時にスケーリング理論の物理的な美しさも損なわれていったと，筆者は考えている。

4.2　相似媒体における 4 つの物理量の換算

Miller and Miller は，図-2 のような形状がミクロに相似であるための必要条件を，気液界面の曲率と接触角について明らかにし，これに基づいて，体積含水率と毛管伝導度がどのような関係になるかを論じ，次に，空間，時間，速度といった物理量のマクロな相似性と流れの基礎方程式とはどのように記述されるか，という問題を論じた。これらは，今日的意義を失っていないので，以下に見て行こう。

説明に際し，reduce という語が頻繁に用いられ，訳せば“換算”，“還元”，“誘導”，“簡約”，あるいは“無次元化”などが当てはまる。ここでは“無次元換算”と理解し，これを略して“換算”という訳を当てることにする。たとえば，reduced pressure は換算圧力とする。

4.2.1　メニスカスの圧力低下の換算

まず，2 つの媒体が相似状態であるための必要条件は，メニスカスの換算曲率が等しいことであるという。この必要条件は難解なので，噛み砕いてみよう。一般に曲面は 2 つの主曲率 $1/r_1$，$1/r_2$（r_1，r_2 は曲面の主曲率半径）によって記述され，その平均値 $1/r_m$ は

$$\frac{1}{r_m}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)$$

で与えられる。平均曲率が $1/r_m$ である液体曲面による液相側の圧力低下 p は，ヤング・ラプラスの式より，

$$p=\frac{2\sigma}{r_m} \tag{1}$$

で表される。ここに，σ は水の表面張力である。Miller and Miller が言いたいのは，平均曲率 $1/r_m$ に特性長 λ を掛ければ，無次元化された換算量 λ/r_m が得られ，これを⑴式に代入すると，

$$2\left\{\frac{\lambda}{r_m}\right\}=\left\{\frac{\lambda p}{\sigma}\right\} \tag{2}$$

が得られるということである。つまり，無次元化された換算圧力は $\lambda p/\sigma$ である。ここで，{　} 記号は，無次元化されるように換算された変数であることを示すために用いられる。2つの相似媒体の $\{\lambda p/\sigma\}$ 値は等しく，したがって $\{\lambda p/\sigma\}$ は換算圧力グループを表す。これが，原著論文の⑸式である。読み取り難い言い回しであるが，特性長 λ を用いれば，無次元化された換算圧力グループを表現できることが重要なのである。

4.2.2　接触角の換算

2つの媒体が相似であるための第2の必要条件は，水の接触角が等しいことである。水の接触角が等しくない系では相似性を比較することはできない。したがって，Miller and Miller の論文では，媒体中の水の接触角は等しいと仮定している。

4.2.3　体積含水率の換算

2つの相似な土壌は，同一の体積含水率 F を持つ。実際，幾何学的相似において自明なとおり，特性長 λ が異なっても，相似である限り F の値は変わらない。無次元化された換算体積含水率グループは，$\{F_H\,\{\lambda p/\sigma\}\}$ で表される。ただし，前述したヒステリシスがあるので，下付文字 H を用いて F がヒステリシスの関数であることを明確にしている。

4.2.4　毛管伝導度の換算

次に取り上げる毛管伝導度（K : capillary conductivity）は，相似媒体の間で最も大きく変化する。しかしここで，本文を味わう前に，毛管伝導度（最近この用語は使用されなくなっている）と関連する別の2つの概念の整理をしておこう。それは，いわゆる透水係数（K' : hydraulic conductivity）および固有透過係数（k : intrinsic permeability）である。

毛管伝導度 K（$\mathrm{kg^{-1}m^3s}$）の次元は［$\mathrm{M^{-1}L^3T}$］，透水係数 K'（$\mathrm{m\,s^{-1}}$）の次元は［$\mathrm{LT^{-1}}$］，固有透過係数 k（$\mathrm{m^2}$）の次元は［$\mathrm{L^2}$］であり，これらは，粘性係数 η（Pa s）［$\mathrm{ML^{-1}T^{-1}}$］を用いて関連付けされる。すなわち，毛管伝導度 K は

$$K=\frac{k}{\eta} \tag{3}$$

で定義される。k は物質固有の透過性を表し，η は媒体中を流れる流体の粘性係数を表すので，K は両者の影響下で決まる。たとえば，同一の多孔質体中に水または空気が透過されるとき，k の値は同一であり，η の値は著しく異なるので，⑶式により，毛管伝導度 K も著しく異なる。なお，毛管伝導度 K と透水係数 K' は水の密度 ρ（$\mathrm{kgm^{-3}}$）［$\mathrm{ML^{-3}}$］と重力加速度 g（$\mathrm{ms^{-2}}$）［$\mathrm{MT^{-2}}$］を用いて

$$K'=K\rho g$$

と換算できるので，物理的には同一概念である。

ところで，Miller and Millerの論文では K/η がpermeabilityであるとの記述があるが，その次元は［$\mathrm{M^{-2}L^4T^2}$］という見慣れないものになり，おそらく誤記であろうと思われる。

さて，本文に戻ろう。2つの相似媒体では，特性長が λ 倍になると，毛管伝導度Kは λ^2 倍となる。この証明は，ナビエ・ストークスの粘性流方程式にさかのぼる必要があり，ここで展開することは避ける。しかし，ハーゲン・ポアズイユの式からフラックスの式を求めると，飽和透水係数の場合，毛管半径rの2乗に比例することを思い出せば，毛管伝導度 K が λ^2 に比例することは了解できる。また，⑶式により，K は流体の粘性係数 η の逆数に比例するので，

$$K\propto\lambda^2/\eta$$

すなわち

$$\eta\frac{K}{\lambda^2}=一定$$

である。したがって，2つの媒体が相似状態にあるとき，$\{\eta K/\lambda^2\}$ は互いに等しい。

以上に加え，毛管伝導度がヒステリシスの関数であることと，換算圧力の関数であることから，換算毛管伝導度グループは

$$\left\{\left(\frac{\eta}{\lambda^2}\right)K_H\left\{\frac{\lambda p}{\sigma}\right\}\right\}$$

と表記された。下付文字の H は，体積含水率 F と同様 K もヒステリシスの関数であることを表している。

4.3　流れの基礎方程式の換算

流れの基礎方程式を，全ての相似媒体に適用するには，やはりグループ表示を用いることになる。すなわち，ダルシー式にしても，それを連続の式に代入して得られる基礎方程式（我々がリチャーズ方程式として承知している式）にしても，特性長 λ を含む式として，全ての相似媒体に同時に適用できる一般式として提示することになる。Miller and Miller は，ここでも厳密性と一般性を失わないために，粘性係数 η と表面張力 σ を式中で陽に表すことにしている。慣例に従って水の粘性係数と表面張力は既知量（一定）として扱っていれば，読みやすい

論文になっていたであろう。とにかく，本文を追おう。まず，ダルシー式は

$$\mathbf{v}=K_H(p)(\mathbf{f}-\nabla p) \tag{4}$$

と示される。ここで，v はマクロな流速と定義されるが，単位を見ると $\mathrm{cm^3\,sec^{-1}\,cm^{-2}}$ すなわち $\mathrm{cm\,sec^{-1}}$ となっており，これは我々がフラックスと呼んでいるものに他ならない。毛管伝導度 $K_H(p)$ は，K が圧力 p の関数であり，かつヒステリシスの関数であることを表している。$\mathbf{f}$ は体積力，∇p は圧力勾配であり，重力下では $\mathbf{f}=\rho g$ という扱いが多いことは周知のとおりである。

この(4)式中の圧力 p を換算圧力グループ $\{\lambda p/\sigma\}$，毛管伝導度 $K_H(p)$ を換算毛管伝導度グループ $\{\eta K/\lambda^2\}$ で表すと，下記の表記に至る。

$$\frac{\eta}{\lambda\sigma}\mathbf{v}=\left\{\frac{\eta}{\lambda^2}K_H\left\{\frac{\lambda p}{\sigma}\right\}\right\}\left[\left\{\frac{\lambda}{\sigma}\mathbf{f}\right\}-\nabla\left\{\frac{\lambda p}{\sigma}\right\}\right] \tag{5}$$

この(5)式では，演算子 ∇ とマクロな速度（フラックス）$\mathbf{v}$ が無次元量に換算されていない（そのため，式の中では｛　｝で表すことができない）。∇ はマクロな長さの逆数，$\mathbf{v}$ はマクロな速度の次元を持つ。そこで，マクロな特性長 L を導入し，∇ を $\{L\nabla\}$ と書けば無次元換算値が得られる。マクロな特性長 L を用いた結果の式は

$$\left\{\frac{\eta L}{\lambda\sigma}\mathbf{v}\right\}=\left\{\frac{\eta}{\lambda^2}K_H\left\{\frac{\lambda p}{\sigma}\right\}\right\}\left[\left\{\frac{\lambda L}{\sigma}\mathbf{f}\right\}-\{L\nabla\}\left\{\frac{\lambda p}{\sigma}\right\}\right] \tag{6}$$

となった（原著(6)式）。

無次元量に換算されたフラックスを表す(6)式を連続の式に代入すれば，相似媒体における基礎方程式を得ることができる。連続の式は，体積含水率 F について，

$$\frac{\partial F}{\partial t}=-div\mathbf{v} \tag{7}$$

であるから，換算体積含水率グループ $\{F_H\{\lambda p/\sigma\}\}$ に対しての連続式は，F，t，div，$\mathbf{v}$ それぞれを無次元換算することによって，

$$\frac{\partial\{F_H\{\lambda p/\sigma\}\}}{\partial\{(\lambda\sigma/\eta L^2)t\}}=-\{Ldiv\}\left\{\frac{\eta L}{\lambda\sigma}\mathbf{v}\right\} \tag{8}$$

という込み入った表記になる（原著(7)式）。

4.4　浸潤現象のスケーリング

図-3 は，以上の相似則を適用して，水が地表面から深さ方向に向かって浸潤していくときの圧力分布の時間変化を示したものである。Miller and Miller が言いたいことは，特性長が異なる媒体における不飽和浸透現象を換算座標軸で表現すれば，全く同じ曲線が描けるということに帰着したのである。Miller and Miller は，この知見が最も実学的に意義のあるテクニックであると述べ，自信の程を伺わせた。

4.5　相似理論の限界

最後に，Miller and Miller は，本理論の適用限界に論及し，シルトより粒径が大きく，砂よりは粒径が小さい土で，体積含水率が中程度の土壌において，本理論が適用できると考えていることを述べた。すなわち，保水や流れの形態が異なる粘質土への適用には限界があることを，十分に認識していたと考えられる。

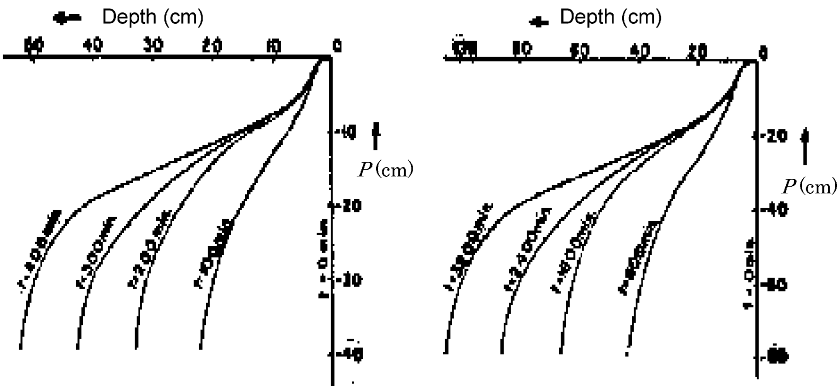


図-3　相似流れの原理。左のグラフの特性長 λ は，右のグラフの 2 倍であり，両者の違いは座標軸の数値と各曲線に付記された時間の値のみである。

Fig. 3　Principle of flow-system similitude.　The characteristic pore size, λ, for the first graph is twice as great as that for the second graph, the only difference in the graphs themselves being in the labeling of curves and axis scales.

5. 相似理論のその後

5.1 前期（1955～1959）の研究

Miller and Millerの原著論文は前述したところで終わる。その後，Miller and Millerを含む後続研究者たちは，相似理論の正しさの証明や限界などについて，実験データを提示する論文を次々と発表した。たとえば，Klute and Wilkinson（1958）は，相似とみなせる土を5組，すなわち粒径が104～125，125～149，149～177，177～210，210～250μmというサイズで，各粒径について粒径分布曲線が非常に似通った砂を人為的に用意し，それぞれの平均粒径を特性長λとした。図-4は，5種に篩い分けられた砂の粒径分布曲線である。各フラクションについて水分特性曲線と不飽和透水係数を厳密に測定して，最後に，Miller and Millerが指示したような換算座標軸の中に全ての曲線を描いてみた。すると，見事にそれらが似たような曲線に束ねられ，Miller and Millerの理論の正しさが実証された。

図-5は，図-4で示された5種類の試料の水分特性曲線を，換算座標軸上に描いたものであり。Miller and Millerが予言したように，ほぼ同一曲線に換算（reduce）されたことが分かる。

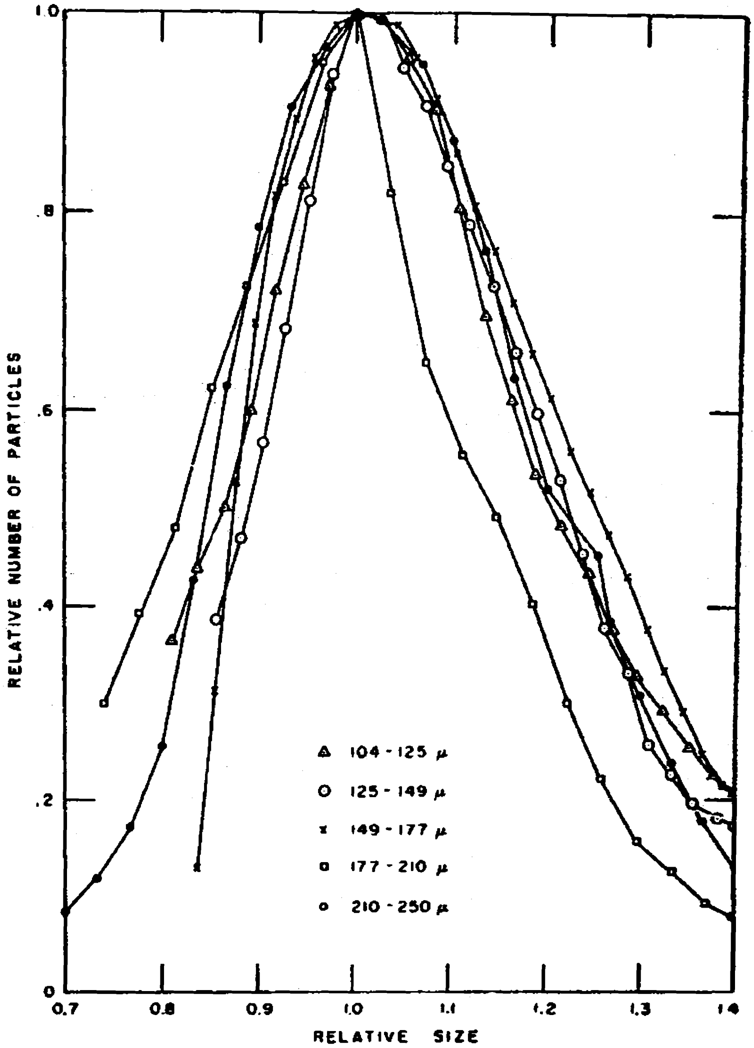
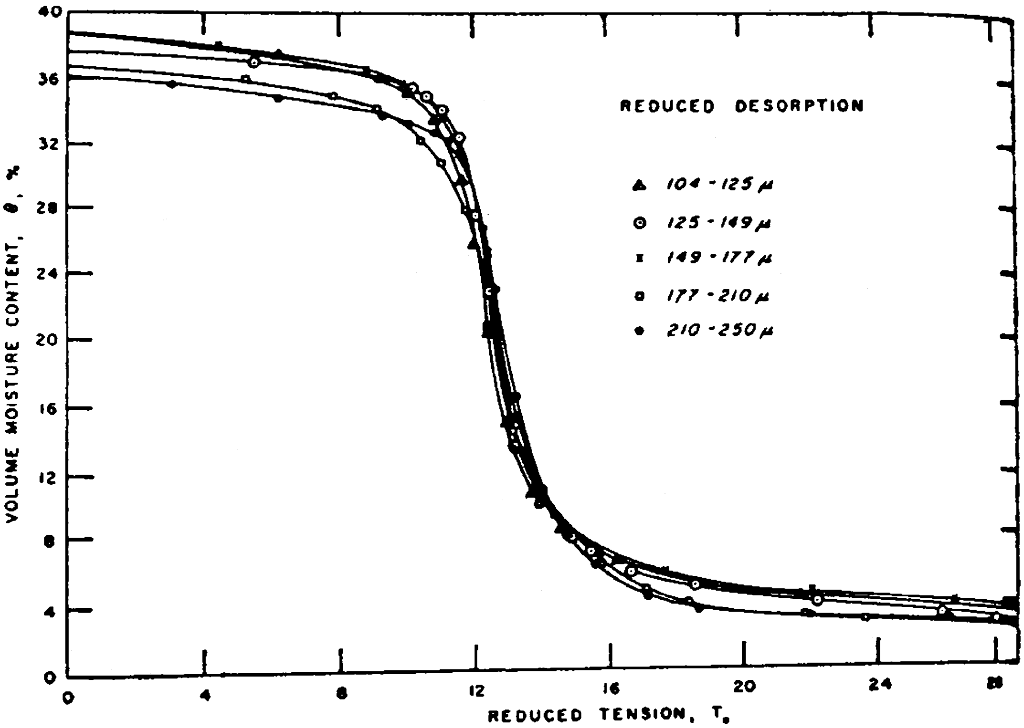


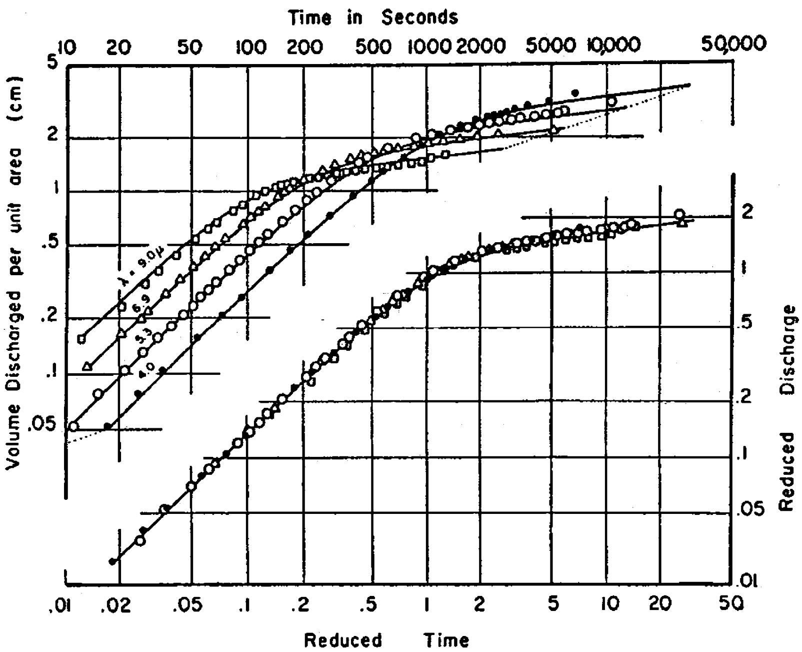
図-4 換算座標軸上での砂の粒径分布曲線

Fig. 4 Reduced size-frequency curves for each sand fraction.



図–5　5種類に篩い分けられた砂の換算水分特性曲線（脱水曲線）

Fig. 5　Reduced desorption data for each sand fraction.



図–6　実時間を横軸とした座標（上部）と換算時間を横軸とした座標（下部）における，4つの相似媒体（篩い分けられた砂）からの鉛直排水曲線

Fig. 6　Vertical drainage under scaled air pressures from four similar media.

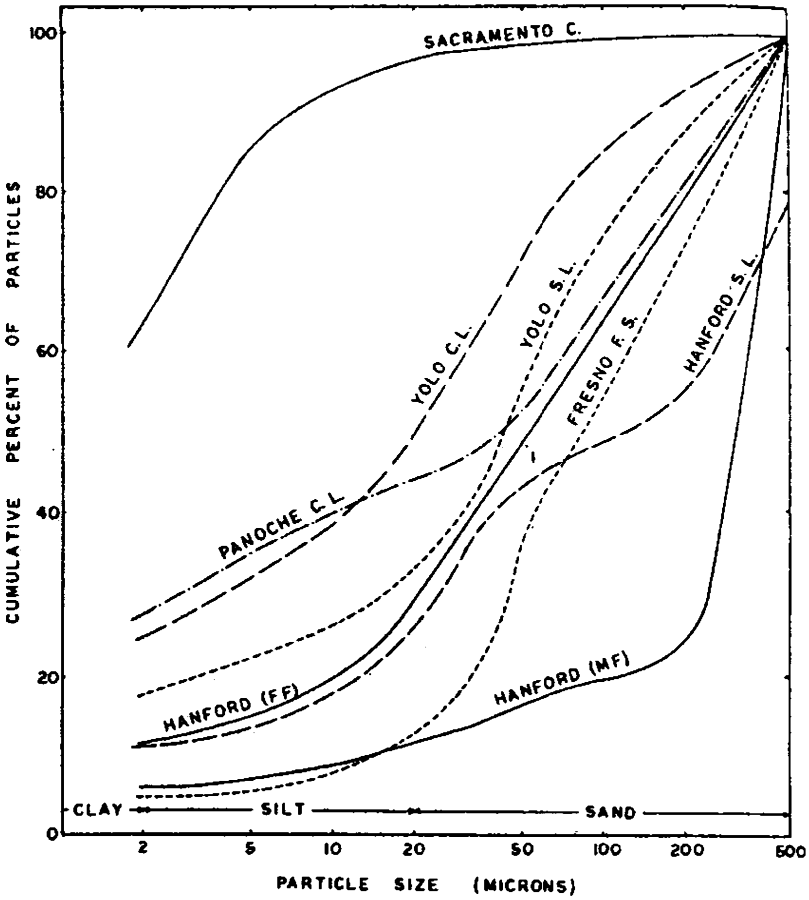


図-7 相似ではない8種類の土壌の粒径組成

Fig. 7 Particle size distribution of Sacramento c, Yolo cl, Panoche cl, Yolo sl, Hanford sl, Hanford (mf), Hanford (ff), and Fresno fs.

また，Elrick *et al.*（1959）は，相似則をより具体的に表示するために，表面張力と粘性流理論（STVF theory）と命名し，その検証を続けた。彼らは，アルミニウム系研磨剤のアランダム粉末，粘土を取り除いたシルト，粘土を取り除かないシルトの3種類の相似とみなせる媒体と，水とブチルアルコールの2種類の異なる液体を用意し，水分特性曲線における相似則の成立を検証した。次に，砂を4つの粒径に画分し，各試料における鉛直浸潤前線進行速度，鉛直排水速度を測定して，スケーリングを行った。図-6は初期に飽和したカラムからの積算排水量を比較したものであり，4本の排水曲線が見事に1本の曲線上に換算されていることが分かる。

ところで，この論文中で，相似則研究への周囲からの批判に反論しているところが面白い。どうやらこの研究テーマは，「単なる知的お遊びに過ぎない」といった批判を受けていたようである。彼ら（E.E. Millerも著者の1人に加わっている）の反論は「この理論（STVF）が無ければ，実験データと理論の乖離は全て非線形性とヒステリシスのせいにされてしまうではないか」というものであった。おそらく，著者と閲読者の間で厳しく取り交わされた議論の一部が噴出したのであろう。

5.2 後期（1972～1979）の研究

Elrick *et al.*（1959）までは，Miller and Millerの理論を忠実に検証するという，いわばオーソドックスな研究が続いた。その後，1960年代には，このテーマに関する論文は著しく減り，歴史的使命を終えたかに見えた。しかし，Reichardt *et al.*（1972）による“Scaling of Horizontal Infiltration into Homogeneous Soils”が再びこの理論を復活させて以降，相似理論の研究が再燃した。すなわち，彼らは，あえて相似でない自然の土を図-7の

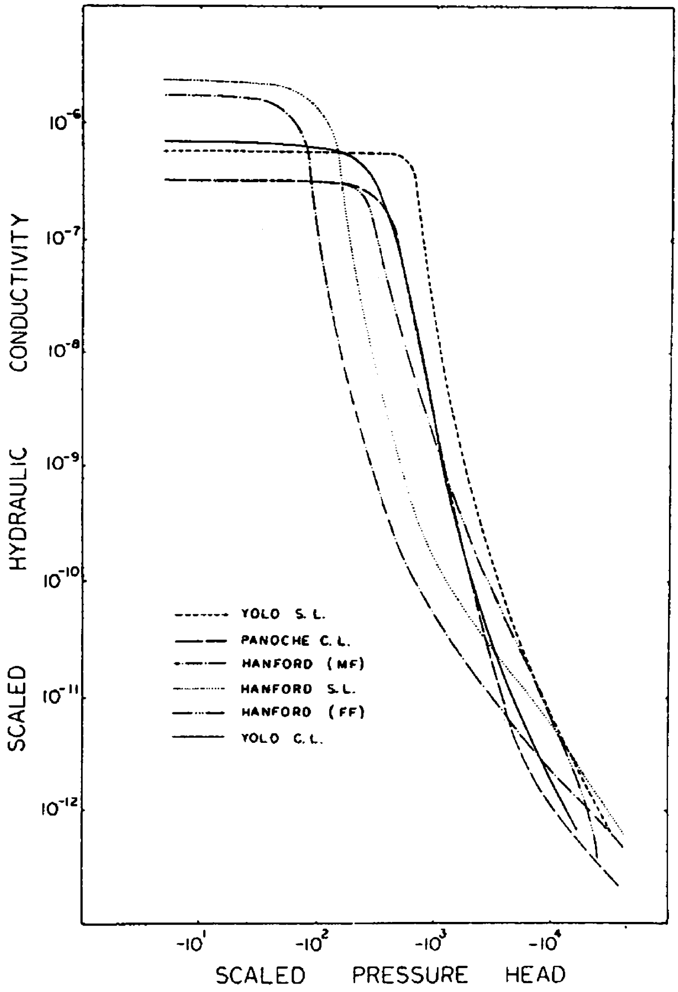


図-8 換算座標軸上の不飽和透水係数。一本化できたとはいえない。

Fig. 8 Scaled values of hydraulic conductivity as a function of scaled pressure head for Yolo sl, Panoche cl, Hanford(mf), Hanford sl, Hanford (ff), and Yolo cl.

ように 8 種類選び，どこまで相似理論に乗るか，という実験的検証を行ったのである。そして，水分特性曲線や不飽和透水係数には相似則が適用できないが，水分拡散係数については良好な相似則が得られることを示した（図-8，9）。すなわち，1950 年代の論文は，ミクロな相似が成立することを前提にして相似媒体概念を適用したのに対し，1970 年代（Reichardt *et al.* 以降）は，必ずしもミクロな相似を前提にしなくても相似概念を拡張できると考え，積極的にそのことを推し進めたのである。

これに続き，Reichardt *et al.*（1975）は，不飽和透水係数のスケーリングを提示し，Peck *et al.*（1977）はスケーリングファクターというパラメータを導入して流域の水収支に応用することを提案し，Warrick *et al.*（1977）は，圃場の水分挙動に対してスケーリングを試み，Sharma and Luxmoore（1979）も，流域の水収支にこの理論を適用し，Simmons *et al.*（1979）は，圃場におけるスケーリングファクターの空間的分布を求め，この分布をもとに不飽和透水係数などの水分特性分布を求める手法を提示した。

以上のように，Miller and Miller の相似概念は，それが発表されてから，その概念が正しいかどうかの検証を行った 1950 年代と，この理論を応用してスケーリングを行う手法を開発した期間 1970 年代とに大きく分けられる。

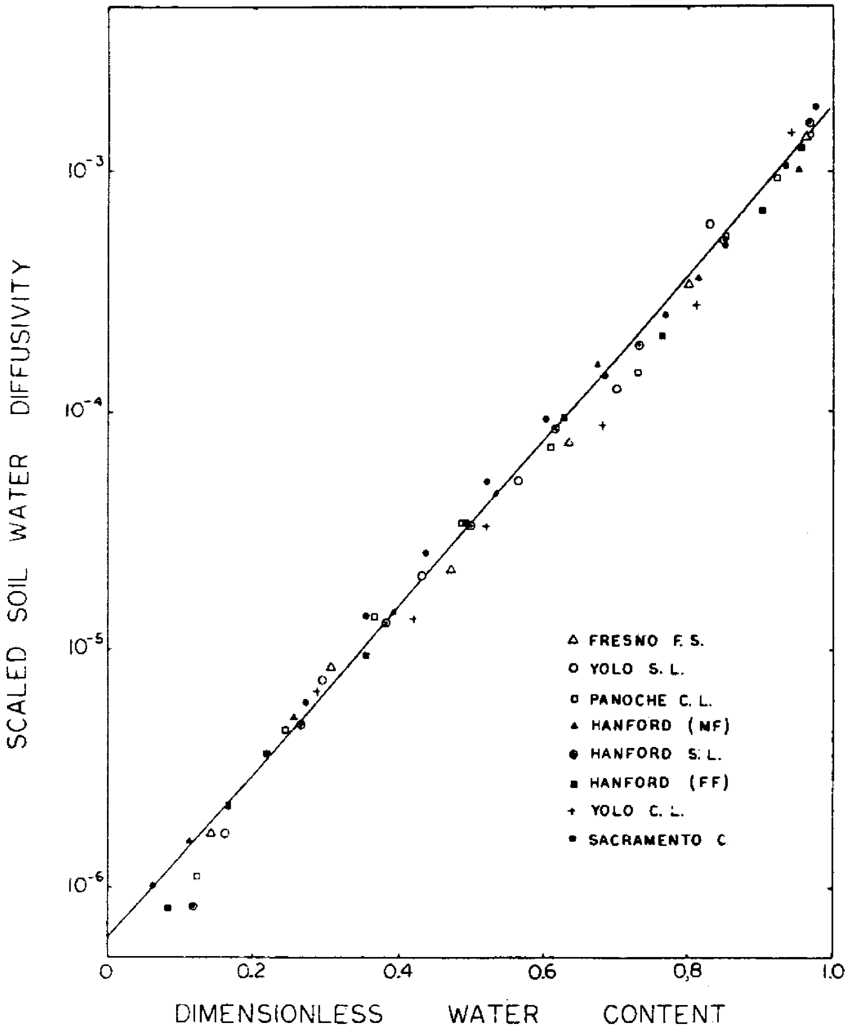


図-9　換算座標軸上の水分拡散係数。スケーリングにより一本化。
Fig. 9　Experimental values of scaled soil water diffusivity (points) and exponential approximation (solid line).

面白いエピソードがある。1970年代に颯爽と登場したReichardtが，ある学会で，フィールドの不均一性は相似理論で説明可能であると発表したとき，最前列にMiller and Millerが並んでしきりに質問してきた。ところが，若きReichardtは，この2人のビッグネームはすでに亡くなった過去の人と思い込んでいたので，2人がMiller兄弟であるとは知らなかったのである。このことに気づいた壇上のReichardtがどんなにショックを受けたかが，その後語り継がれたそうである。

それはとにかく，1950年代と，1970年代の相似理論をどう見るかという見解は研究者によって様々であろう。筆者は，前期（1950年代）においては，理論とその検証という明確な枠組みの中で物理的な基礎研究が行われたことを評価したい。しかし，後半（1970年代）において，相似概念の物理的な前提条件よりもスケーリング手法の工学的利便性を追及した華々しい一連の研究については，本質的な発展があったとは考えていない。いわゆるプラグマティズム（実効主義）の範疇に入るのではないか，という批判的な見方をしている。

5.3　非相似モデルの研究

筆者らは，Miller and Millerのモデルに触発されて，非相似媒体（Non-Similar Media）モデルを提案した

（宮﨑・西村，1994；Miyazaki, 1996)。このモデルを発案したきっかけは，同じ土壌が膨張したり収縮したりして体積変化を起こすとき，固体粒子のサイズは変化しないのに間隙サイズが変化するため，相似概念が適用できないことに矛盾を感じたことであった。そこで，Miller and Miller が提案した特性長を，固相特性長，間隙特性長に分離してみたところ，体積変化をする土壌のスケーリングに部分的成功を収めたので，これを非相似媒体概念（NSMC）モデルと名づけた。そして，団粒が発達した土壌についても NSMC モデルを拡張できると考え，土粒子サイズの固相特性長（S_1）と間隙特性長（d_1)，団粒サイズの固相特性長（S_2）と間隙特性長（d_2)，を図–10のように定義してスケーリングを試みた。

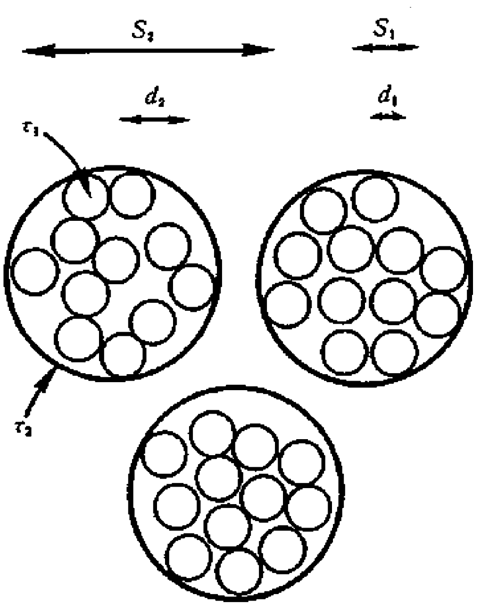
まず，団粒がない土では，特性長 S_1 と d_1 のみを定義する。この土の要素体積を

$$(S_1+d_1)^3$$

で与えることとすれば，この土のある体積 V とその質量 M は，

$$V=N(S_1+d_1)^3 \tag{9}$$

$$M=N\tau\rho_s S_1^3 \tag{10}$$



図–10 非相似媒体モデル。固相特性長（S_1, S_2）と間隙特性長（d_1, d_2）の概念図。

Fig. 10 Illustration of characteristic lengths for solid phase (S_1, S_2) and for pore space (d_1, d_2) in the Non-Similar Media Concept model.

と表される。ここに，N は体積 V 中に含まれる土壌要素の数であり，τ は体積 S_1^3 中に占める固相体積割合を表す形状係数（$0<\tau\leqq 1$）である。ρ_s は土粒子密度である。この土の乾燥密度は，(9)，(10)式より

$$\rho_b=\tau\rho_s\left(\frac{S_1}{S_1+d_1}\right)^3 \tag{11}$$

と定めることができる。この土が収縮または膨張して，その乾燥密度が ρ_b から ρ_b' に変化した場合，後者は

$$\rho_b'=\tau\rho_s\left(\frac{S_1}{S_1+d_1'}\right)^3 \tag{12}$$

に変化するであろう。なぜなら，同一土壌の乾燥密度は間隙特性長 d_1 の変化のみで表され，固相特性長 S_1 や形状係数 τ の値は変化しないと考えられるからである（強い圧力を受けて固相が変形あるいは破壊する場合を除く)。ここで，Miller and Miller と同様に，この土の透水係数は間隙特性長の 2 乗に比例すると仮定すると，

$$\frac{K_s'}{K_s}=\left(\frac{d_1'}{d_1}\right)^2 \tag{13}$$

と表すことができる。ここに，K_s は乾燥密度が ρ_b であるときの土の飽和透水係数，K_s' は乾燥密度が ρ_b' であるときの飽和透水係数である。ここで，乾燥密度が異なる土の間隙特性長 d_1, d_1' は，(11)，(12)式より，

$$d_1=S\left[\left(\frac{\tau\rho_s}{\rho_b}\right)^3-1\right] \tag{14}$$

$$d_1'=S\left[\left(\frac{\tau\rho_s}{\rho_b'}\right)^3-1\right] \tag{15}$$

であることを用いれば，乾燥密度の異なる同一の土の飽和透水係数について，

$$\frac{K_s'}{K_s}=\left[\frac{\left(\dfrac{\tau\rho_s}{\rho_b'}\right)^{1/3}-1}{\left(\dfrac{\tau\rho_s}{\rho_b}\right)^{1/3}-1}\right] \tag{16}$$

という関係が求まる。

以上のような NSMC モデルの詳細と団粒土への拡張は，原著論文を見ていただくしかない。特に，固相特性長 S を一辺とするミクロな立方体中に占める固相体積割合である形状係数をマッチングファクターとすることに関する議論も，原著論文に詳しい。

図–11 は，非相似媒体モデル(16)式を用いて国頭マージ（沖縄の土壌）の飽和透水係数と乾燥密度との関係を予測し，実測値と比べたものである。試みに，世界的に広く利用されているコゼニー・カルマンの式や，キャンベルによる方法も適用し，予測の適正度を比較したところ，非相似媒体モデルの適用性がかなり優れていた。

余談であるが，図–11 のデータは，計算間違いがもた

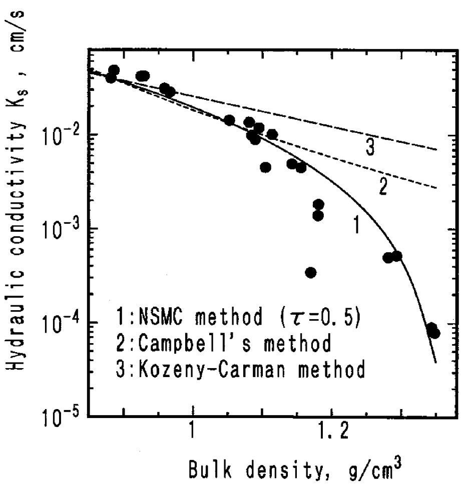


図-11 国頭マージの飽和透水係数と乾燥密度の関係。黒丸は実測値，実線1は非相似モデルによる予測，点線2はキャンベルの方法による予測，点線3はコゼニー・カルマン式を用いた予測。

Fig. 11 Measured (points) and predicted (lines) saturated hydraulic conductivities of Kunigami maji light clay as functions of the dry bulk density.

らした，予想外のものである。当時，共同研究者（西村拓氏）が指導していた学生が，乾燥密度の計算を誤り，非常にゆるい状態の土から良く締った土まで，予定外に幅広い乾燥密度領域で土の準備を行い，それらの飽和透水係数を測定したのであり，当初の指示とは異なる条件設定であった。しかし，得られたデータは正確に測定されており，図-11のプロットが偶然生み出されたものである。

その後，非相似媒体モデルを発展拡張させる論文が発表され，不飽和透水係数の予測も可能になった（Zhuang *et al.*, 2000，2001；Nakano and Miyazaki, 2005，など）。しかし，世界では，その時々の話題の中心に関与する研究をタイミングよく発表すると幸運に恵まれるものである。その意味では，我々の研究は1950年代か1970年代に発表すべきだったのかもしれない。流行に流されることは嫌うが，しかし，いま最も熱く議論されている中心事項に関わって自己の研究が展開できれば，それに越したことは無いということであろう。

6. おわりに

古典を読む，という企画でMiller and Millerの原著論文を読み直しつつ，いつの間にか自分の研究を振り返ることにもなってしまったが，古典には，そういう省察を呼び覚ますような働きもあるのではないだろうか。また，古典には，必ずしも分かりやすい記述ではないのに，強いインパクトを与える力があることも，明らかである。「なぜこのような相似モデルを思いついたのだろう？」という好奇心も湧く。（本人の後日談では，実物の1/4サイズのアルミ製の弓を，趣味で作って実物と比較するのに相似解析を必要とした，と打ち明けている。）

そして何よりも，古典と呼ばれるような論文を書くためには，突出した創造力，徹底した思索力，緻密な表現力が要求されることを教えられる。

謝 辞

この原稿を書くにあたり，閲読者および原稿を読んでくれた方々と，細部にわたるまで尽きない議論を行った。原典の解釈を巡って見解が分かれ，結論が一致しなかった点も少なからずあった。議論を起こす力，これもまた古典に秘められる必須条件かもしれない。

引 用 文 献

キャベンディッシュ研究所・A.B. ピパード（共編），木村・中村（訳・解答）（1968）：キャベンディッシュ物理学Ⅰ. pp. 269–270，みすず書房.

Elrick, D.E., Scandrett, J.H. and Miller, E.E. (1959) : Tests of Capillary Flow Scaling. Soil Sci. Soc. Am. Proc., **23** : 329–332.

Haines, W.B. (1930) : Studies in the Physical Properties of Soils. V. The Hysteresis Effect in Capillary Properties, and the Modes of Moisture Distribution Associated Therewith. The Journal of Agricultural Science, **20** : 97–116.

Klute, A. and Wilkinson, G.E. (1958) : Some Tests of the Similar Media Concept of Capillary Flow ; Ⅰ. Reduced Capillary Conductivity and Moisture Characteristic Data. Soil Sci. Soc. Am. Proc., **22** : 278–281.

Miller, E.E. and Miller R.D. (1955a) : Theory of Capillary Flow : Ⅰ. Practical Implications. Soil Sci. Soc. Am. Proc., **19** : 267–271.

Miller, R.D. and Miller E.E. (1955b) : Theory of Capillary Flow : Ⅱ. Experimental Information. Soil Sci. Soc. Am. Proc., **19** : 271–275.

Miller, E.E. and Miller R.D. (1956) : Physical Theory for Capillary Flow Phenomena. Journal of Applied Physics, **27** (4) : 324–332.

Miller, E.E. (1980) : Similitude and Scaling of Soil-Water Phenomena. In D. Hillel (ed.) Applications of Soil Physics. pp. 300–318.

Miller, E.E. (1990) : Introduction. In D. Hillel and D.E. Elrick (ed.) Scaling in Soil Physics : Principles and Applications. SSSA Special Publication Number 25.

宮﨑　毅・西村　拓（1994）: 非相似多孔質体モデルを用いた土壌のスケーリング手法．農土論集，（174）: 41–48.

Miyazaki, T. (1996) : Bulk Density Dependence of Air Entry Suctions and Saturated Hydraulic Conductivities of Soils. Soil Sci., **161** (8) : 484–490.

Nakano, K. and Miyazaki, T. (2005) : Predicting the saturated hydraulic conductivity of compacted subsoils using the non-similar media concept. Soil Till. Res., **84** : 145–153.

Peck, A.J., Luxmoore, R.J. and Stolzy, J.L. (1977) : Effects of Spatial Variability of Soil Hydraulic Properties in Water Budget Modeling. Water Resour. Res., **13** (2) : 348–354.

Reichardt, K., Nielsen, D.R. and Bigger, J.W. (1972) : Scaling of Horizontal Infiltration into Homogenious Soils. Soil Sci. Soc. Am. Proc., **36** : 242–245.

Reichardt, K., Libardi P.L. and Nielsen, D.R. (1975) : Unsaturated Hydraulic Conductivity Determination by a Scaling Technique. Soil Sci., **120** (3) : 165–168.

Russo, D. and Bresler, E. (1980) : Scaling Soil Hydraulic Properties of a Heterogeneous Field. Soil Sci. Soc. Am. J., **44** : 681–680.

Simmons, C.S., Nielsen, D.R. and Bigger, J.W. (1979) : Scaling of Field-measured Soil-water Properties. Ⅰ. Methodology, Ⅱ. Hydraulic Conductivity and Flux. Hilgardia, **47** (4) : 77–174.

Sharma, M.L. and Luxmoore, R.J. (1979) : Soil Spatial Variability and its Consequences on Simulated Water Balance. Water Resour. Res., **15** (6) : 1567–1573.

Warrick, A.W., Mullen, G.J. and Nielsen, D.R. (1977) : Scaling Field-Measured Soil Hydraulic Properties Using a Similar Media Concept. Water Resour. Res., **13** (2) : 355–362.

Warrick, A.W. and Amoozegar-Fard, A. (1979) : Infiltration and Drainage Calculations Using Spatially Scaled Hydraulic Properties. Water Resour. Res., **15** (5) : 1116–1120.

Wilkinson, G.E. and Klute, A. (1958) : Some Tests of the Similar Media Concept of Capillary Flow ; Ⅱ. Flow System Data. Soil Sci. Soc. Am. Proc., **22** : 278–281.

Zhuang, J., G.R. Yu, Miyazaki, T. and Nakayama, K. (2000) : Modeling Effects of Compaction on Soil Hydraulic Properties : An Approach of Non-similar Media Concept. Advances in Geoecology, **32** : 144–153.

Zhuang, J., Yan, J. and Miyazaki, T. (2001) : Estimating Water Retention Characteristic from Soil Particle-Size Distribution using a Non-Similar Media Concept. Soil Sci., **166** (5) : 308–321.

要　　旨

1956 年，物理学者である兄 E.E. Miller と土壌物理学者である弟 R.D. Miller により提起された土の相似理論を取り上げた。ミクロスケールの特性長を定義すれば，1 つの土から別の土の物理性を導くことができるというこの理論は，1950 年代に熱い議論を引き起こした。1960 年代に議論は沈静化したが，1970 年代に再びフィールドの不均一性を現す指標として再燃した。土の相似理論は，美しい統一的な理論であるが，適用限界を持つ。筆者らが開発した土の非相似概念は，この有名な古典に触発されて生まれたものであることも，併せて記述した。

受稿年月日 : 2006 年 6 月 9 日
受理年月日 : 2006 年 9 月 5 日