

座標変換を用いた任意形状における土中の物質移動シミュレーション Numerical Simulation in soil of arbitrary shape using coordinate transformation

菊池貴^{*}, 登尾浩助^{**}, 阿部芳彦^{*}
Takashi Kikuchi^{*}, Kosuke Noborio^{**}, Yoshihiko Abe^{*}

1. はじめに

近年、土中の物質移動のモデル化が行われており、それらは偏微分方程式で表されている。モデルを検証するためにも、それらの偏微分方程式を高い精度で解く事が求められている。偏微分方程式の数値解法として差分法は一般に高い精度が得られる手法として知られている。また差分法では一般に直交格子を用いて計算を行うが、任意形状の領域に対しても変数変換によって直方体や長方形の形状に写像することで解く手法が知られている。

本研究では土中の物質移動の問題に対してこの手法を適用することで、実際の地形を考慮したシミュレーションを実行し、その有効性の確認を行った。

2. 偏導関数の変換

座標変換を行う際に物理空間の座標は (x, y, z) 空間とし、一般座標は (ξ, η, ζ) 空間とする。また、 x, y, z はそれぞれが ξ, η, ζ の関数である。 x, y, z に関する偏導関数は ξ, η, ζ に関する偏導関数に以下のように置き換えられる。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_x & \eta_x & \zeta_x \\ \xi_y & \eta_y & \zeta_y \\ \xi_z & \eta_z & \zeta_z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{pmatrix}$$

2次元の場合は

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_x & \zeta_x \\ \xi_z & \zeta_z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{pmatrix}$$

となる。これらを用いて基礎方程式を一般座標上で定式化していく

3. 一般座標を用いた定式化

ここでは、2次元の水移動を例にして定式化を行う。

2次元の水移動の基礎方程式は以下ようになる。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial q_{wx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{wz}}{\partial z} = 0$$
$$q_{wx} = -k \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad q_{wz} = -k \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - 1 \right)$$

これを変形していく。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial q_{w\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial q_{w\zeta}}{\partial \zeta} = 0$$
$$q_{w\xi} = \xi_x q_{wx} + \xi_z q_{wz}, \quad q_{w\zeta} = \zeta_x q_{wx} + \zeta_z q_{wz}$$

$$q_{wx} = -k \left(\xi_x \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \zeta_x \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right), \quad q_{wz} = -k \left(\xi_z \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \zeta_z \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} - 1 \right)$$

4 . 差分化

変数変換によって生じた新しい座標変数 (ξ, ζ) の値域などの決め方は全くの任意である。そこで簡単化のために $\Delta\xi = \Delta\zeta = 1$ とする。Crank-Nicolson のスキームを用い、空間精度と時間精度に関して中心差分近似をする。

$$\begin{aligned} \theta_{i,j}^{n+1} - \theta_{i,j}^n + \Delta t \left(q_{w\xi}^{n+\frac{1}{2}} - q_{w\xi}^{n-\frac{1}{2}} + q_{w\zeta}^{n+\frac{1}{2}} - q_{w\zeta}^{n-\frac{1}{2}} \right) &= 0 \\ q_{w\xi}^{i+\frac{1}{2},j} &= \xi_x^{i+\frac{1}{2},j} q_{wx}^{i+\frac{1}{2},j} + \xi_z^{i+\frac{1}{2},j} q_{wz}^{i+\frac{1}{2},j} \\ q_{w\zeta}^{i,j+\frac{1}{2}} &= \zeta_x^{i,j+\frac{1}{2}} q_{wx}^{i,j+\frac{1}{2}} + \zeta_z^{i,j+\frac{1}{2}} q_{wz}^{i,j+\frac{1}{2}} \\ q_{wx}^{i+\frac{1}{2},j} &= -\frac{k_{i+\frac{1}{2},j}}{2} \left[2\xi_x^{i+\frac{1}{2},j} (\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}) + \zeta_x^{i+\frac{1}{2},j} (\psi_{i+\frac{1}{2},j+1} - \psi_{i+\frac{1}{2},j-1}) \right] \\ q_{wx}^{i,j+\frac{1}{2}} &= -\frac{k_{i,j+\frac{1}{2}}}{2} \left[\xi_x^{i,j+\frac{1}{2}} (\psi_{i+1,j+\frac{1}{2}} - \psi_{i-1,j+\frac{1}{2}}) + 2\zeta_x^{i,j+\frac{1}{2}} (\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}) \right] \\ q_{wz}^{i+\frac{1}{2},j} &= -\frac{k_{i+\frac{1}{2},j}}{2} \left[2\xi_z^{i+\frac{1}{2},j} (\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}) + \zeta_z^{i+\frac{1}{2},j} (\psi_{i+\frac{1}{2},j+1} - \psi_{i+\frac{1}{2},j-1}) - 2 \right] \\ q_{wz}^{i,j+\frac{1}{2}} &= -\frac{k_{i,j+\frac{1}{2}}}{2} \left[\xi_z^{i,j+\frac{1}{2}} (\psi_{i+1,j+\frac{1}{2}} - \psi_{i-1,j+\frac{1}{2}}) + 2\zeta_z^{i,j+\frac{1}{2}} (\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}) - 2 \right] \end{aligned}$$

5 . シミュレーション結果

上記の定式化により、任意形状での計算が可能になった。ここでは一般座標系を用いたシミュレーションの例として、畝のある地形における2次元の水移動のシミュレーション結果を示す。図1は計算に用いた格子の形状である。土性に関しては Yolo light clay[1]を用いる。

図2は一様な水分分布である土壌に対して畝の表面の一部から飽和量の水分を与え、どのように拡散していくかをシミュレーションした結果である。結果については定量的な検証を行う必要があるが、定性的には明らかな問題は見て取れない。

この結果から、本研究で行った定式化により、任意形状においても差分法を用いた計算が可能であることが確認できた。このことから、今後本手法の広い応用が見込まれる。

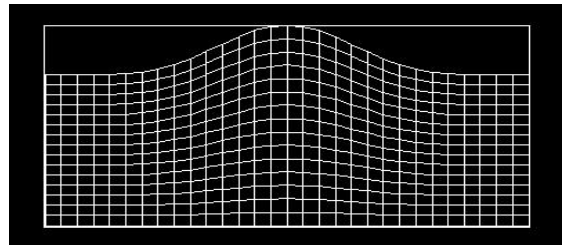


図1 計算に用いた格子

Fig.1 The mesh using this simulation

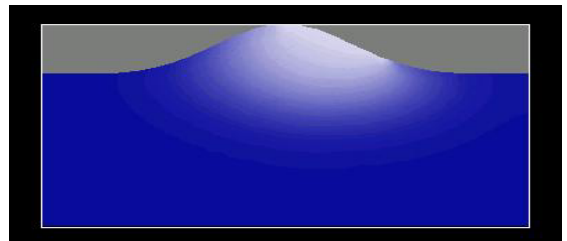


図2 一般座標系を用いたシミュレーション結果

Fig.2 The simulation that using generalized coordinate system