

Mixed-Form Richards 式のための陽的スキームの開発

Explicit Scheme for Mixed Form of Richards Equation

○竹内 潤一郎・河地 利彦・泉 智揮

○Junichiro Takeuchi, Toshihiko Kawachi, and Tomoki Izumi

1 はじめに

近年、畑や森林土壌内の水、熱、物質の動態を、物理モデルに基づいて数値計算することが多くなってきている [1],[2]。通常、これらの土壌は不飽和土壌を含むため、水の動態に関して Richards 式が用いられる。

Richards 式には圧力水頭を未知変数としたものと、圧力水頭と体積含水率の 2 つの未知変数が混在するものがある。圧力水頭をベースとした Richards 式は飽和領域も含めて統一的に土壌内の水の流れを表すことができるが、飽和付近では比水分容量が急激に変化するため計算が不安定になる [2]。また、降水や蒸発散によるフラックスは圧力水頭に換算して計算されるため、水収支が合わないことが知られている [3]。一方、Mixed-Form Richards 式は飽和領域と不飽和領域では支配式が変わるため、不飽和領域のみを対象としたものが多く [3],[4],[5],[6]、飽和領域を含めた計算スキームはほとんど見られない。

時間進行に関して、既往の研究では時間ステップの大きさにかかわらず安定な陰解法が採用されている。Richards 式は、不飽和透水係数が圧力水頭の間数として表わされる準線形型であるため、陰解法では Picard 法や Newton 法による繰り返し計算を必要とし、計算負荷が大きい。また、一般に用いられる完全陰解法は一次精度であり、Crank-Nicolson 法は 2 次精度である。

物理モデルを用いた流出解析において、山地斜面内の水の流れを計算するには、質量保存と飽和側方流の計算が必要となる。そこで本研究では、飽和状態も含んだ領域を対象とし、Mixed-Form Richards 式の数値計算スキームを開発することを目的とする。空間に対して有限体積法を用いて離散化し、時間進行に関して比較的計算負荷の小さい陽解法である 4 次の Runge-Kutta 法を採用する。

2 モデルの定式化

2-1 支配方程式

土壌内の水の質量保存を満たす Mixed-Form Richards 式を採用し、飽和領域も計算対象とするため、飽和領域とその付近において土壌骨格と水の圧縮性を考慮する。鉛直上向きを正としたデカルト座標系 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ を用いた以下の式で表わさ

れる。

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + W S_w S_s \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\nabla \cdot (-K \nabla h) - q \quad (1)$$

$$W(\psi) = \begin{cases} 0, & \text{if } \psi < \psi_a \\ \frac{\psi - \psi_b}{\psi_b - \psi_a} + 1, & \text{if } \psi_a \leq \psi < \psi_b \\ 1, & \text{if } \psi_b \leq \psi \end{cases} \quad (2)$$

$$S_s = \rho_w g (\beta_s + \phi \beta_w) \quad (3)$$

ここで、 ϕ は間隙率、 S_w は飽和度、 t は時間、 W は飽和領域とその付近のみ土壌骨格と水の圧縮を考慮するための重み関数、 S_s は比貯留量、 ψ は圧力水頭、 K は不飽和透水係数、 $h (= \psi + x_3)$ は全水頭、 q は発散、 ψ_a はパラメータ、 ψ_b は空気侵入水頭、 ρ_w は水の密度、 g は重力加速度、 β_s は土壌骨格の圧縮率、 β_w は水の圧縮率である。

2-2 数値モデル

上述の Mixed-Form Richards 式から、空間に対して有限体積法を用いて離散化を行う。すなわち、重み関数 w_e を式 (1) の両辺にかけた後、全領域 Ω で積分する。

$$\int_{\Omega} w_e \left(\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + W S_w S_s \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) d\Omega = \int_{\Omega} w_e \{-\nabla \cdot (-K \nabla h)\} d\Omega - \int_{\Omega} w_e q d\Omega \quad (4)$$

$$w_e = \begin{cases} 1, & \text{if } x \in \Omega_e \\ 0, & \text{if } x \notin \Omega_e \end{cases} \quad (5)$$

ここで、 Ω_e ($e = 1, \dots, N_e$; N_e は要素数) は部分領域である。この式をガウスの定理を用いて変形し、以下の常微分方程式である要素方程式が得られる。

$$\Delta_e \phi_e \frac{dS_{we}}{dt} + \Delta_e W_e S_{we} S_{se} \frac{d\psi_e}{dt} = -f_e - \Delta_e q_e \quad (6)$$

$$\Delta_e = \int_{\Omega_e} d\Omega \quad (7)$$

$$f_e = \int_{\Gamma_e} -K \nabla h \cdot \boldsymbol{n}_e d\Gamma_e \quad (8)$$

ここで、 f_e は部分領域 Ω_e からの流出フラックス、 Δ_e は部分領域 Ω_e の測度、 \boldsymbol{n}_e は部分領域 Ω_e の境界 Γ_e における外向き単位法線ベクトルである。

飽和領域では、飽和度 S_{we} は一定であるため、式

(6) の左辺第一項は消え、以下のような圧力水頭を未知変数とした常微分方程式となる.

$$\frac{d\psi_e}{dt} = -\frac{f_e}{\Delta_e S_{se}} - \frac{q_e}{S_{se}} \quad (9)$$

一方、不飽和領域では、式 (6) の左辺の時間微分項はともに考慮する必要がある. 圧力水頭に関する時間微分項は、不飽和領域においては飽和状態と不飽和状態の貯留係数を連続的につなぐという役割を果たすために付加されている. また、飽和度の時間微分項に比べて小さいため、圧力水頭の時間微分項は右辺に移項して、以下のような手順で解く.

$$\frac{dS_{we}}{dt} = -F_e \quad (10)$$

$$F_e = \frac{f_e}{\Delta_e \phi_e} + \frac{q_e}{\phi_e} + \frac{W_e S_{we} S_{se}}{\phi_e} \frac{\psi_e^* - \psi_e^t}{\delta t} \quad (11)$$

$$\psi_e^* = \psi \left(\frac{S_{we}^*}{\phi_e} \right) \quad (12)$$

$$S_{we}^* = S_{we}^t - \frac{\delta t f_e^t}{\Delta_e \phi_e} \quad (13)$$

ここで、上付き文字の t は時間に関するインデックスを表し、 $\psi(\theta)$ は van Genuchten モデルのような土壌水分特性曲線から得られる関数である. これらの常微分方程式は 4 次の Runge-Kutta 法を用いて計算される.

次の時間ステップを計算した際に、要素が不飽和状態から飽和状態に変化する場合 ($\tilde{S}_{we}^{t+1} > 1$; \tilde{S}_{we}^{t+1} は計算された一時的な変数), 以下の操作を行い質量保存を確保するとともに、圧力水頭に空気侵入水頭 ψ_b を与える.

$$S_{we}^{t+1} = \min(\tilde{S}_{we}^{t+1}, 1) \quad (14)$$

$$S_{we'}^{t+1} = \tilde{S}_{we'}^{t+1} + \max(\tilde{S}_{we'}^{t+1} - 1, 0) \quad (15)$$

$$\psi_e^{t+1} = \psi_b \quad (16)$$

ここで、下付き文字 e' は要素 e に接する要素番号で、地下水面が上昇する場合は上部の要素番号、浸潤前線が降下する場合は下部の要素番号を与える.

本研究では、陽解法を採用するので時間ステップ δt は安定条件を満たす必要がある. 飽和状態では、通常の拡散方程式となるので、FTCS (Forward in Time and Central difference in Space) スキームにおける拡散数 D^f の安定条件を代用する. また、不飽和状態では、流出フラックスが可動水量を超えないようにする.

$$\begin{cases} D_e^f = \frac{K_e \delta t}{W_e S_{we} S_{se} l_e^2} < \frac{1}{2}, & \text{if saturated} \\ \delta t F_e < S_{we} \phi_e - \theta_{re}, & \text{if unsaturated} \end{cases} \quad (17)$$

ここで、 l は要素の代表長さ、 θ_r は残留体積含水率である.

3 検証

上述の数値モデルを、鉛直次元を仮定できる厚さ 1m の黒ボク土壌に適用し、水収支について検証を行う. 地表はノイマン境界とし降水や蒸発を与え、底面はディリクレ境界とし地下水面とする. 名古屋で観測された 1975 年 4 月 20 日から 10 月 12 日までの気象データ [7] を用い、蒸発散は Penman-Monteith 法を用いて推定する. 計算の結果得られた圧力水頭と体積含水率の変動と水収支を図 1 から 3 に示す.

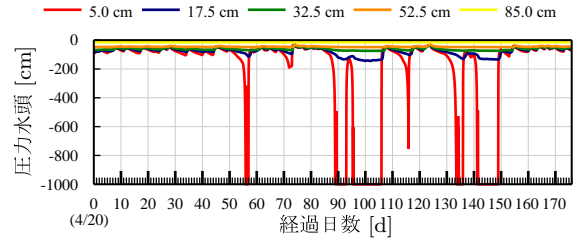


図 1 : 圧力水頭

Fig.1: Pressure head

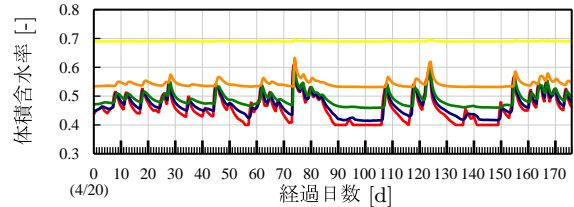


図 2 : 体積含水率

Fig.2: Volumetric water content

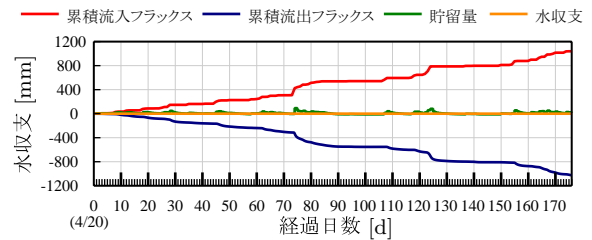


図 3 : 水収支

Fig.3: Water balance

4 まとめ

Mixed-Form Richards 式を有限体積法と 4 次の Runge-Kutta 法を用いて解く計算スキームを開発し、次元モデルを用いてモデルの検証を行った. その結果、水収支が一致することが示された. このモデルを多次元に拡張していくことが、今後の課題である.

参考文献 [1] 農業農村工学会土壌物理研究部会 (2007): 第 46 回土壌物理研究部会研究会講演集, 26p. [2] 日野幹雄ら (1989): 洪水の数値予報, 北森出版, 252p. [3] Celia, M. A. et al. (1990): *Water Resour. Res.*, 26(7), pp.1483-1496. [4] Simunek, J. et al. (2005): The HYDRUS-1D software package, Department of Environmental Sciences University of California Riverside, 240p. [5] Kees, C. E. and Miller, C. T. (2002): *Advances in Water Resour.*, 25, pp.159-177. [6] Kavetski, D. et al. (2001): *Advances in Water Resour.*, 24, pp.595-605. [7] 気象業務支援センター (1998): 地上気象観測時日別データ (1971-1990), CD-ROM.