

擬似気泡関数と CIP 法による浅水長波モデル Shallow Flow Model using Quasi-Bubble Function Element and CIP Method

○桐 博英* 安瀬地一作* 関島健志* 中田 達*

KIRI Hirohide, AZECHI Issaku, SEKIJIMA Kenji and NAKADA Toru

1 はじめに

河口低平農地における洪水や高潮などの氾濫災害では、水路を介して氾濫水が伝搬したり排水されたりするため、氾濫被害の推定に水路の影響を無視することはできない。水路網が整備された河口低平農地における氾濫被害の予測では、水路流れを一次元でモデル化し、解析に組み込むのが効果的である。また、氾濫災害時には、水利施設近傍を中心に極めて激しい現象が生じることなどから、一次元モデルの高度化は重要である。本報では、農業水利施設の配置等を忠実に再現可能な有限要素法に対し、安定で再現性の高い解析を行うことを目的として、擬似気泡関数要素と CIP 法を用いた浅水長波モデルを構築した。

2 モデルの概要

浅水長波流れの有限要素解析では、水位と流速を同じ節点で補間する同次補間が用いられてきた。しかし、同次補間による解析では非物理的な振動により計算が不安定になることが知られている。この振動は、差分法ではスタッガード格子、有限要素法では流速と水深に異なる補間関数を用いる混合補間で抑制できる。混合補間では、流速の補間関数を水位のものより 1 次以上高次にする必要があり、この条件を満たす最も単純なものに MINI 要素がある。一方、CIP 法は、基礎方程式を移流フェーズと非移流フェーズに分離し、非移流フェーズを解いて得られた物理量の分布を補間して移流フェーズを計算する。このため、数値的不安定を生じやすい移流成分が容易に計算でき、厳しい条件の現象の解析に適している。

2.1 基礎方程式

流速と水深をそれぞれ u , h , 重力加速度を g とすると、本モデルで用いる基礎方程式は式 (1), (2) で表される。

$$h_t + (hu)_x = 0 \tag{1}$$

$$u_t + uu_x + gh_x = 0 \tag{2}$$

連続式 (1) と非移流フェーズの式に対し、擬似気泡関数要素を用いた混合補間を適用する。

有限要素定式化で用いられる水位および流速の補関関数の形状を **Fig. 1** に示す。

2.2 CIP 法の適用

CIP 法は、擬似スプライン関数で表現される流速分布をもとに、流速が $\Delta x = -u\Delta t$ だけ離れた地点から移流したとする。

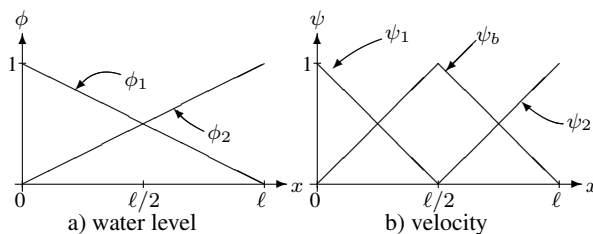


Fig. 1: 補関関数の形状Shape of interpolate functions

Table 1: CIP 補関関数の係数一覧

List of coefficients of CIP interpolate function

	式
a_1	$\frac{4u_{1x} + 16u_{bx} + 4u_{2x}}{\ell^4} + \frac{24u_1 - 24u_2}{\ell^5}$
a_2	$-\frac{12u_{1x} + 40u_{bx} + 8u_{2x}}{\ell^3} + \frac{-68u_1 + 16u_b + 52u_2}{\ell^4}$
a_3	$\frac{13u_{1x} + 32u_{bx} + 5u_{2x}}{\ell^2} + \frac{66u_1 - 32u_b - 34u_2}{\ell^3}$
a_4	$-\frac{6u_{1x} + 8u_{bx} + u_{2x}}{\ell} + \frac{-23u_1 + 16u_b + 7u_2}{\ell^2}$
a_5	u_{1x}
a_6	u_1

*農研機構農村工学研究部門, NARO Institute for Rural Engineering

キーワード: 擬似気泡関数, CIP 法, 有限要素法, 浅水長波流れ, ダム崩壊流れ

要素内の流速分布は、通常の CIP 法では 3 次関数で近似されるが、本モデルでは、各要素の両端の節点に加えて擬似気泡点での値が得られるため 5 次関数で補間される。節点 1 と節点 2 の間の流速分布が式 (3) で表されるとき、節点および擬似気泡点での境界条件式 (4) を考慮して得られる係数 a_i を **Table 1** に示す。

$$u(x) = \sum_{i=1}^6 a_i x^{6-i} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} u(0) &= u_1 & u(\ell/2) &= u_b & u(\ell) &= u_2 \\ u_x(0) &= u_{1x} & u_x(\ell/2) &= u_{bx} & u_x(\ell) &= u_{2x} \end{aligned} \quad (4)$$

本モデルでは、運動方程式の非移流フェーズを予測子修正子法による 2 次精度の陽解法、連続式を陰解法により解析した後、移流フェーズの計算を行った。

3 数値解析例

本モデルの検証のため、ダム崩壊流れの解析を行った。対象としたダム崩壊流れ問題の概要を **Fig. 2** に示す。本ケースでは、ダム崩壊後に生じる段波のフロント部分で射流となる。解析では、CIP 法を適用しない擬似気泡関数モデルによる非保存系および保存系の基礎方程式を用いたモデルの解析とともに、厳密解と比較した。なお、本モデルによる解析は $\Delta t = 0.4s$ 、CIP 法を適用しないモデルでは、 $\Delta t = 0.1s$ としたほか、人工粘性項を付加した。

ダム崩壊 30s 後の水深と流速の分布をそれぞれ **Fig. 3** と **Fig. 4** に示す。CIP 法を適用しないモデルでは、非保存形のモデルで段波の進行が厳密解よりも遅れるのは、保存則が満たされないためであり^{1), 2)}で示されている風上差分の計算結果と同様である。また、保存形の基礎方程式による解析結果は、段波の進行は再現できているものの、流速の振動に伴い水位が大きくアンダーシュートしている。一方、本モデルの解析結果は、段波のフロントで若干の水深のアンダーシュートが見られるものの、厳密解をよく再現できている。

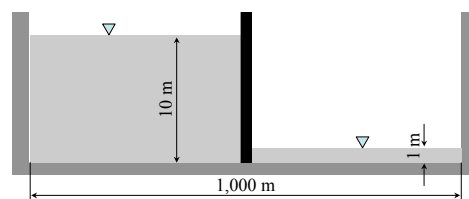


Fig. 2: ダム崩壊流れ問題の概要 Model of dam break flow

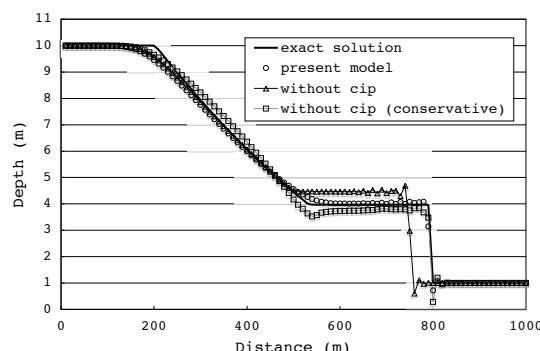


Fig. 3: 水深分布の比較 Comparison of depth

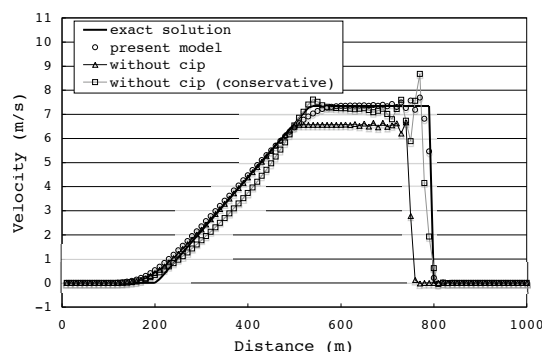


Fig. 4: 流速分布の比較 Comparison of velocity

4 まとめ

本報では、1次元浅水長波流れの有限要素モデルとして、擬似気泡関数要素と CIP 法を適用したモデルを構築し、解析の安定性を検証した。その結果、本モデルは、シンプルでありながら、CIP を適用しないモデルで必要だった人工粘性項がなくても安定した解析を行うことができた。また、本モデルでは、常流と射流が混在する状況でも段波の進行を良く再現でき、水利施設を含む水路系への適用が期待される。

参考文献

- 1) Toro, E. F.(2001): *Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows*, John Wiley & Sons.
- 2) 中山恵介, 佐藤圭洋, 堀川康志 (1998): CIP 法を用いた浅水流方程式の数値計算手法の開発, 水工学論文集, 第 42 巻, pp.1159-1164