

# 非整数階微分を用いた泥炭の圧密挙動のモデル化について On the Modeling of Consolidation Behavior for Peat Using Fractional Derivative

○寺田健司\* 立石信次\*\* 今泉祐治\* 川口清美\*

Kenji TERADA, Shinji TATEISHI, Yuji IMAIZUMI and Kiyomi KAWAGUCHI

## 1. はじめに

泥炭地域において、農業用管水路などの構造物の不同沈下は施設の安全性に大きく関わる。可とう継手の配管や埋設構造など、適切な対策を計画するためにも、設計段階における泥炭の沈下推定精度の向上は重要な課題である。管路の沈下予測には  $\Delta e$  法や泥炭式<sup>1)</sup>などを用いることが多いが、より精度の高い予測手法の開発が望まれる。本研究では、レオロジーモデルを用いて泥炭と構造物の相互作用のモデル化が可能かを検討している。ここでは粘弾性体のモデル化などの工学分野で注目されている、非整数階微分を用いて泥炭の圧密特性のモデル化を試みた。

## 2. 泥炭試料

圧密試験に使用した泥炭は、北海道の石狩泥炭地に位置する当別町において、シンウォールサンプラーを用いて採取した 4 試料である。直径 7.3cm、高さ 6.0cm の供試体を作成し、段階載荷圧密試験を実施した。Table 1 に各試料の試験結果を示す。

Table 1 泥炭の室内圧密試験結果  
Result of consolidation test of peat

| 試料番号 | 採取深度 (m) | 初期含水比 $w_0$ (%) | 初期間隙比 $e_0$ | 圧縮指数 $C_c$ | 圧密降伏応力 $P_c$ (kPa) |
|------|----------|-----------------|-------------|------------|--------------------|
| A    | 2.0~3.0  | 749.6           | 12.759      | 7.19       | 14.2               |
| B    | 4.0~5.0  | 395.4           | 7.843       | 4.54       | 21.0               |
| C    | 5.4~6.2  | 347.4           | 7.347       | 4.53       | 31.6               |
| D    | 5.0~6.0  | 375.4           | 7.897       | 4.69       | 35.9               |

## 3. 非整数階微分を用いたモデル

非整数階微積分 (fractional calculus) とは微積分の階数を非整数に一般化した概念であり、粘弾性体の力学挙動などを記述できる強力なツールとして知られている<sup>2)</sup>。ここでは、Fig. 1 に示す粘弾性モデルを用いて泥炭の圧密挙動のモデル化を試みた。このモデルの応力-ひずみ ( $\sigma$ - $\epsilon$ ) 関係は、

$$\sigma(t) = E\epsilon(t) + E\tau^\alpha \frac{d^\alpha \epsilon(t)}{dt^\alpha} \quad (1)$$

と表される。ここに、 $t$ : 時間、 $E$ : 弾性係数、 $\tau$ : 緩和時間 ( $=\eta/E$ )、 $\eta$ : 粘性係数、 $\alpha$ : 微分階 ( $0 < \alpha < 1$ ) である。仮に式(1)で  $\alpha = 1$  とすると Fig. 1 はバネとダンパを並列に配置した典型的な Voigt 模型となり、 $\alpha = 0$  とすると弾性係数  $2E$  のバネと同等、つまり弾性体となる。

ステップ応力、初期ひずみゼロの条件 ( $\sigma(t) = \sigma_0 U(t)$ ,  $\epsilon(0) = 0$ ) で、式(1)の解析解をラプラス変換により求めると、式(2)のようになる。

$$\epsilon_{calc}(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left\{ 1 - E_\alpha \left[ -\left(\frac{t}{\tau}\right)^\alpha \right] \right\}, \quad E_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(\alpha n + 1)} \quad (2)$$

ここに、 $E_\alpha(x)$ : Mittag-Leffler 関数、 $\Gamma(x)$ : ガンマ関数である。式(2)を圧密試験で得られた沈下曲線 (時間-沈下関係) にフィッティングすることで、モデルのパラメータを求めた。

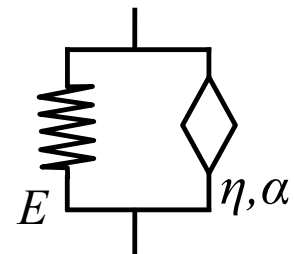


Fig. 1 非整数階 Voigt 模型  
Fractional Voigt model

\* 国立研究開発法人土木研究所寒地土木研究所 Civil Engineering Research Institute for Cold Region, PWRI

\*\* 北海道開発局 Hokkaido Regional Development Bureau キーワード: 圧密, 泥炭, 非整数階微分, レオロジー

#### 4. 結果と考察

試料 A の各圧密荷重段階における沈下曲線のプロットを **Fig. 2** に示す. 能登<sup>3)</sup>を参考に, ある荷重  $p_i$  に対する沈下曲線は, 荷重  $p_i$  載荷前を初期状態と考えて, 次式により計算した.

$$\varepsilon_{mea}(t) = \frac{S(t)}{H_{i-1}} \quad (3)$$

ここに,  $H_{i-1}$ :  $p_i$  載荷前の試料高さ,  $S$ : 沈下量である. 式(2)による回帰曲線も **Fig. 2** に示す. 各荷重段階について, 式(2)により沈下曲線を良好に再現できることが確認できる. 試料 B,C,D についても同様に良好なフィッティング結果が得られた.

**Fig. 3** には圧密荷重  $p$  と微分階数  $\alpha$  との関係を示す. 各試料とも圧密荷重の変化に伴い  $\alpha$  の値が変化する. 変化の傾向を過圧密領域と正規圧密領域に分けて考察する.

まず正規圧密状態のとき,  $\alpha$  の値は圧密荷重の増加に伴い増加し, その後概ね 0.5~0.6 の間で一定値をとることがわかる. このことから, 塑性域に入った泥炭はある一定の微分階数  $\alpha$  でモデル化ができる可能性がある. また, 一定となった  $\alpha$  の値は試料 A,B,C,D の順に小さくなっており, 泥炭の採取深度や圧密降伏応力などに関連があると考えられる.

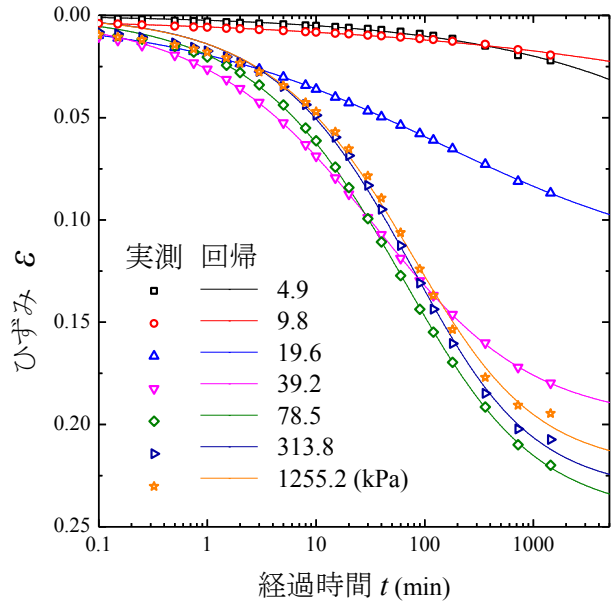
一方で, 過圧密領域では, 圧密荷重の増加に伴い  $\alpha$  が減少する傾向が確認できる.

$\alpha$  が 0 に近づくことは, モデルが粘弾性から弾性に変化していくことを意味しており, これは圧密の進行に伴い試料の間隙が減少したためであると考えられる.

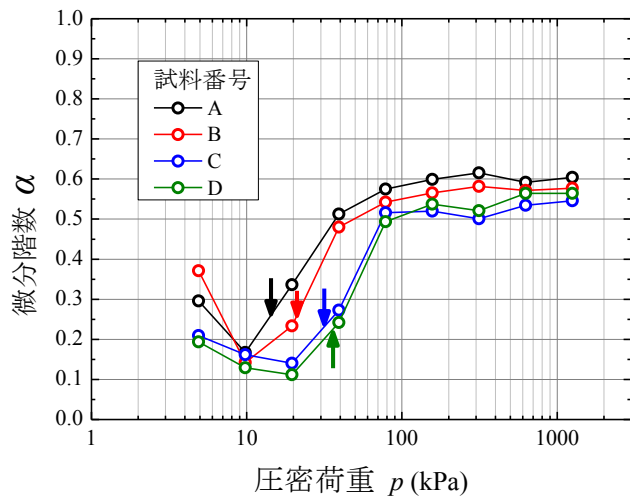
#### 5. おわりに

泥炭を粘弾性体と仮定し, 非整数階微分を用いて力学挙動のモデル化を試みた. 圧密のような一定応力条件下ではあるが, 本モデルにより泥炭の力学特性をモデル化できる可能性が示された. 今後は土質データとモデルのパラメータの関係の検討や, 間隙水の影響, その他の沈下予測式との比較などについて考察を進める必要がある.

**参考文献** 1) 能登繁幸 (1991): 「修正された泥炭性軟弱地盤の沈下予測式」の簡略化, 開発土木研究所月報, 460, pp.37-41. 2) 例えば M. A. Matlob and Y. Jamali (2017): The Concepts and Applications of Fractional Order Differential Calculus in Modelling of Viscoelastic Systems: A primer, arXiv:1706.06446v2[physics.bio-ph]. 3) 能登繁幸 (1987): 泥炭地盤の沈下量の予測に関する考察, 土質工学会論文報告集, 27(2), pp.107-117.



**Fig. 2** 沈下曲線の実測と回帰曲線の比較 (試料 A)  
Comparison between measured value and fitting results of time-strain curve



**Fig. 3** 圧密荷重と  $\alpha$  の関係  
(図中の矢印は圧密降伏応力を示す)  
Relationship between load level and  $\alpha$