

不飽和領域における Darcy-Brinkman 式の理論解 Analytical solution of Darcy-Brinkman equation in unsaturated domain

○嶋田侑治*, 藤澤和謙*, 村上 章*

SHIMADA Yuji, FUJISAWA Kazunori, MURAKAMI Akira

1. はじめに

ため池やフィルダムといった水利施設の内部には、飽和領域、不飽和領域、(水のみ等の)流体のみで占められた領域(流体領域)が存在する。流体領域では通常の浸透流に比べて流速が非常に大きく、漏水やパイピングの発達は施設の機能低下および安定性を損なう原因となる。著者らは、異なる三相(不飽和、飽和、流体領域)に及ぶ流れを連続的に把握するため、飽和領域のみを対象とする従来の Darcy-Brinkman 式を不飽和領域にまで拡張した。これまで、上記の三相における定常計算には成功したものの、不飽和領域の Darcy-Brinkman 式の理論解は提案されておらず、遷移状態での計算精度は検証できていない。本論では、計算精度の検証を行うことを目的として、不飽和領域における Darcy-Brinkman 式の理論解を導出する。

2. 支配方程式

Darcy-Brinkman 式は、Navier-Stokes 式を多孔質領域において空間平均をとることで導出され、飽和領域中の浸透流を記述する方程式である。同様の平均操作を不飽和領域に施すと、不飽和領域にも適用可能な Darcy-Brinkman 式は以下のように表される(藤澤ら, 2019)。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{u_i u_j}{\theta} \right) + \frac{\theta}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\theta g}{k} u_i = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

ここに、 u_i , k , p , g , ρ , θ はそれぞれ、Darcy 流速、透水係数、圧力、重力加速度、密度、体積含水率である。式(1)は、 $\theta = 1.0$, $k = \infty$ の時、Darcy-Brinkman 式は Navier-Stokes 式に一致するため、浸透流とパイピング流れの同時解析に有利となる。

3. Darcy-Brinkman 式の線形化

不飽和領域では、流速が小さいため移流項の影響が小さくなる。また、式(1)の左辺において、第4項の粘性項は第5項の Darcy 項と比較して非常に小さく、移流項及び粘性項を無視した Darcy-Brinkman 式を考える。これらの項を無視しても、 k や θ は Van Genuchten モデルや Mualem モデルのように、水圧 p (または水頭 h) の非線形な関数となる。そのため、式(1)は流速 u_i と圧力 p ($=\rho gh$) に関して非線形な支配方程式となり、直接的に理論解を求めることは困難となる。Tracy(2006) は水分特性曲線の関数形を工夫することで Richards 式の線形化が可能なことを示しており、ここでも同様な方法で式(1)の線形化を行う。具体的には $k = k_s e^{\alpha h}$, $\theta = \theta_s e^{\alpha h}$ とし、 $\bar{h} = e^{\alpha h} - e^{\alpha h_r}$, $C_1 = g/\alpha$, $C_2 = \theta_s g/k_s$ とすると、次元問題における式(1)は以下のように表される。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \theta_s C_1 \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + C_2 u = 0 \quad (2a), \quad \theta_s \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2b)$$

ここに、 α は水分特性曲線の形状を決定する定数、 h_r は乾燥状態での最低圧力水頭、 θ_s は飽和体積含水率、 k_s は飽和透水係数である。また、次元問題のため、式(2)では流速 u_i の添え字をなくして u と書く。

4. 消散型波動方程式の導出

式(2a)を時間 t で微分し、式(2b)に代入すると、 \bar{h} が消去され、 u に関する以下の式を得る。

*京都大学大学院農学研究科 Graduate School of Agriculture, Kyoto University 浸透流, 数値流体力学

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + C_2 \frac{\partial u}{\partial t} = C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3)$$

これは、消散型波動方程式 (Damped wave equation) と呼ばれる偏微分方程式であり、初期条件と境界条件を適切に設定することにより理論解を求めることができる。今、 $0 < x < L$ を解析領域とし、 $u(L, t) = 0$, $\partial u(0, t)/\partial x = 0$ と境界条件を与えると、次の一般解を得る。

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{C_2}{2}t} \cos \beta x (B_1 \sin qt + B_2 \cos qt), \quad \beta = \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{\pi}{L}\right), \quad q = \frac{1}{2} \sqrt{4C_1 \beta^2 - C_2} \quad (4)$$

また、同様に式(2)から u を消去し、 \bar{h} に関する方程式を、 $\bar{h}(0, t) = 0$, $\partial \bar{h}(L, t)/\partial x = 0$ の境界条件を与えて解く。その場合も、式(4) と同様の結果を得る。

$$\bar{h} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{C_2}{2}t} \sin \beta x (A_1 \sin qt + A_2 \cos qt), \quad h = \frac{1}{\alpha} \log (\bar{h} + e^{\alpha h_r}) \quad (5)$$

ここに、 A_1, A_2, B_1, B_2 は初期条件によって定まる積分定数である。

5. 偏微分方程式の厳密解

長さ L の一次元領域において、 $x = 0$ から $x = L$ にかけて滑らかに増加する水頭分布が与えられ、原点から間隙水が流出する問題を考える。ただし、初期流速はゼロと仮定する。 $x = 0$ では圧力一定 (および $\partial u/\partial x = 0$), $x = L$ では流速ゼロ (および $\partial \bar{h}/\partial x = 0$) の境界条件を課す。この条件は前節のものに対応し、一般解は式(4)と(5)で与えられる。初期条件は以下である。

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} q B_1 \cos \beta x, \quad \bar{h}(x, 0) = -\frac{d}{L^2} (x - L)^2 + d, \quad \frac{\partial \bar{h}(x, 0)}{\partial t} = 0 \quad (6)$$

ここに、 d は $x = L$ における圧力水頭に対応する。

式(6)の初期条件からは A_1, A_2, B_1, B_2 は次のように決定される。

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{C_2}{2q} A_2, & A_2 &= \frac{4d}{(L\beta)^3} \\ B_1 &= -\frac{\beta}{q} C_1 \theta_s A_2, & B_2 &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

図1に、理論解として得られた圧力水頭分布を示す。時間経過と共に左端から水が抜け、計算領域内の圧力水頭差が小さくなる様子が表される。

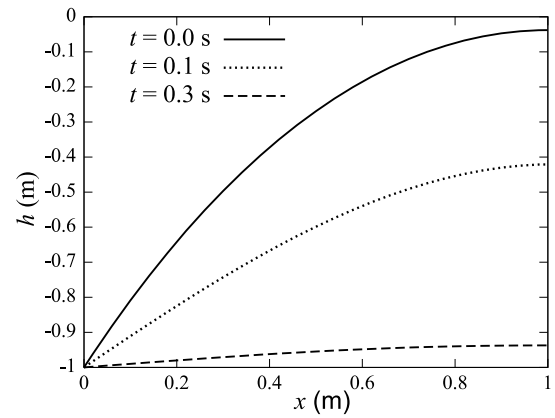


図1 圧力水頭分布の変化
Fig. 1 Solution of pressure head

6. おわりに

非線形偏微分方程式である Darcy-Brinkman 式から移流項と粘性項を除き、Tracy(2006)と同様に、指数型の水分特性曲線を与えることで、同式に線形化を施した。線形化された Darcy-Brinkman 式は消散型波動方程式に帰着でき、それを解くことで理論解の導出を行った。本論では、不飽和領域において時間経過に伴って水頭差が減少する具体的な問題に対して、初期値境界値問題の理論解を示した。今後は、得られた理論解を用いて、数値解析の精度検証を行う予定である。

参考文献：1) 藤澤和謙, 村上 章 (2019) : Darcy-Brinkman 式の不飽和領域への拡張, 農業農村工学会論文集, No.308, pp.27-36. 2) F. T. Tracy (2006) : Clean two- and three- dimensional analytical solutions of Richards' equation for testing numerical solvers, *Water Resour. Res.*, 42, pp.1-10.