

速度型 Space-Time 有限要素法における時間積分性能の制御と弾塑性動的応答解析 Control of time-integration properties of velocity-based Space-Time FEM for dynamic response analysis of elastoplastic materials

○藤澤和謙*, 笹川秀徒**, 村上 章*

Kazunori FUJISAWA, Shuto SASAKAWA, Akira MURAKAMI

1. はじめに

現在, 大地震に対する農業用ダムの安全性評価が継続的に進められている. 大地震を想定したレベル2地震動においては, これまで以上に安定かつ高精度な時間積分法が要求される. 地震応答に限らず, 構造物の動的計算には, 適切な時間積分法が必要不可欠であり, その高度化は研究対象となり続ける. 著者らは, 空間方向だけでなく時間方向にも有限要素を利用する Space-Time 有限要素法を波動方程式に適用し, 構造物の動的計算を対象とした速度型 Space-Time 有限要素法 (velocity-based Space-Time FEM, 以下では v-ST/FEM と呼ぶ) を提案した¹⁾. 同手法は, 無条件安定かつ3次精度以上の時間積分性能を有するが, Amplitude decay (Dissipation) や Period elongation (Dispersion) といった時間積分特性を制御することができず, 特に高周波成分の減衰効果を与えられない点が課題として挙げられる. 本論では, Dissipation を制御できる v-ST/FEM (Dissipation-controllable v-ST/FEM) を提案し, 弾塑性の動的応答問題を通して, 提案手法の精度と安定性を示す.

2. Dissipation-controllable v-ST/FEM

基本的な時間積分特性を把握するにあたり, 1 質点ばねの運動方程式

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega^2u = 0 \quad (1)$$

を考える. ここに, u , t , ω は変位, 時間, 角周波数を意味する. 式(1)は時間方向の微分方程式であり, 空間に対する離散化を含まないことから, Space-Time 有限要素法とは区別し, 時間方向のみに有限要素法を適用する方法として (velocity-based time-discontinuous Galerkin FEM, v-TDG/FEM) と呼ぶ. v-TDG/FEM では, 形状関数を変化させても無条件安定性を保つことができるため, Dissipation (減衰に対応する効果) を制御できる形状関数を模索する. 採用する形状関数には無限の通り数の関数が考えられるが, ここでは図 1 に示すカギ型の形状を持つ関数を提案する.

図 2 に, この形状関数を用いた場合のスペクトル半径 ρ を $\Omega = \omega \Delta t$ の関数として示す (実際に, スペクトル半径は Ω のみの関数となる). 同図において, Original で示した実線は

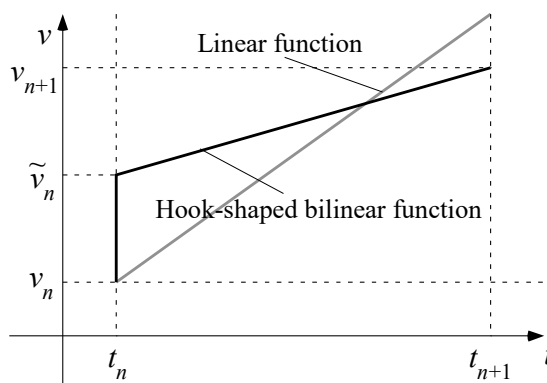


図 1 Dissipation を制御するための形状関数
Fig.1 Dissipation-controllable shape function

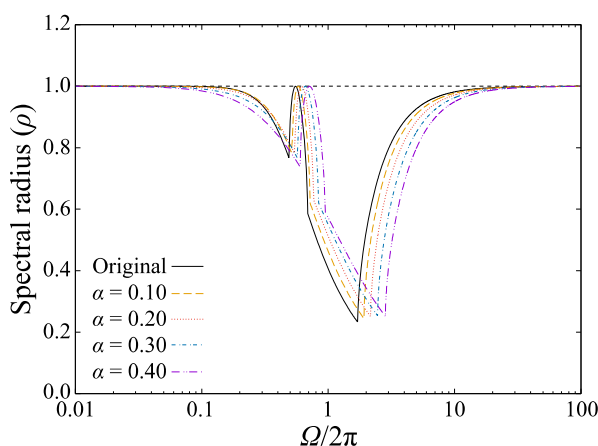


図 2 スペクトル半径 ($\alpha=0.1, 0.2, 0.3, 0.4$)
Fig.2 Spectral radius ($\alpha=0.1, 0.2, 0.3, 0.4$)

*京都大学 Kyoto University, **関西電力 Kansai Electric Power Co. Inc.

Keywords: 動的応答解析, 時間積分, スペクトル半径

$\alpha = 0$ に対応し、 α の値が大きくなるにつれて低周波領域と高周波領域において、スペクトル半径が小さくなる（減衰の効果が大きくなる）。この結果は、 α の値を変えることで、数値振動などの高周波成分の減衰を制御できることを意味する。なお、すべての周波数領域において、スペクトル半径 ρ は 1 よりも小さく、無条件安定性は保たれる。

3. 計算結果（弾性体及び弾塑性体）

図 3 に示す弾性体の片持梁に対する一次元衝突問題を上述した Dissipation controllable v-ST/FEM によって数値解析を行う。自由端（右側）には衝撃力（矩形波）を作用させた。梁は単位断面面積をもち、その長さは 50 m である。その密度と弾性係数は 2500 kg/m^3 と $1.0 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ であり、要素幅は 0.1 m、時間ステップ幅は 1.0×10^{-4} 秒とした。図 4 には、理論解と共に Original v-ST/FEM と Dissipation-controllable v-ST/FEM の計算結果 ($t=0.015$ 秒の梁の応力分布) を示す。Dissipation-controllable v-ST/FEM では、衝撃による応力伝播の数値振動が取り除かれている。

図 3 と同様の境界条件を持つ梁を対象として、左側半分を弾塑性体、右側半分を弾性体として設定し、自由端には 0.005 秒の間に $1.0 \times 10^6 \text{ N}$ の衝撃力（矩形波）を作用させた。弾塑性材料には、弾完全塑性構成式を採用した。降伏応力 σ_y は $0.87 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ 、時間ステップ幅は 1.0×10^{-5} 秒と設定した。降伏応力 σ_y は、衝撃力よりも小さく設定することで、弾塑性材料には降伏応力より大きな応力は伝播しない。図 5 は Original v-ST/FEM による各時刻 ($t=0.0124, 0.0175, 0.0225$ 秒) の応力分布を、図 6 は Dissipation-controllable v-ST/FEM ($\alpha=0.20$) による同時刻の応力分布を示す。Original v-ST/FEM と Dissipation-controllable v-ST/FEM とを比較すると、後者ではなめらかな応力波形が計算されており、前節と同様に高周波成分を減衰できることが分かる。

参考文献: Sharma, V., Fujisawa, K. and Murakami, A.: Velocity-based time discontinuous Galerkin space-time finite element method for elastodynamics. *Soils and Foundations*, **58**(2), 491-510, 2018.

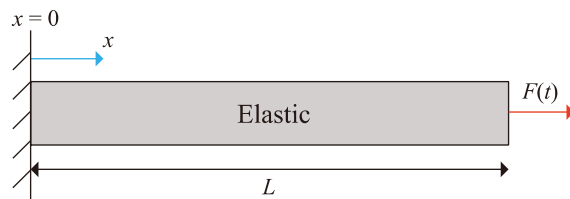


図 3 一次元衝突問題
Fig.3 1D bar with impulsive loading

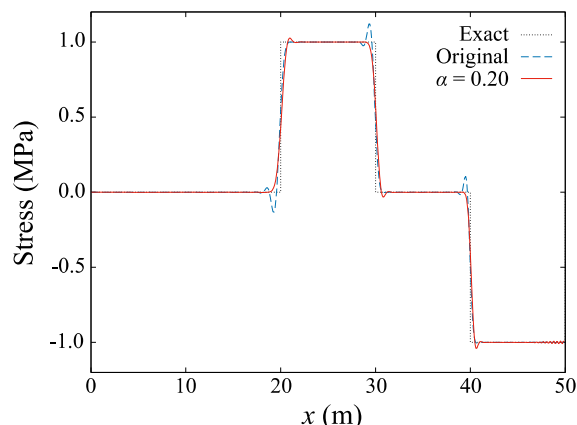


図 4 応力の時間応答
Fig.4 Computed stress field

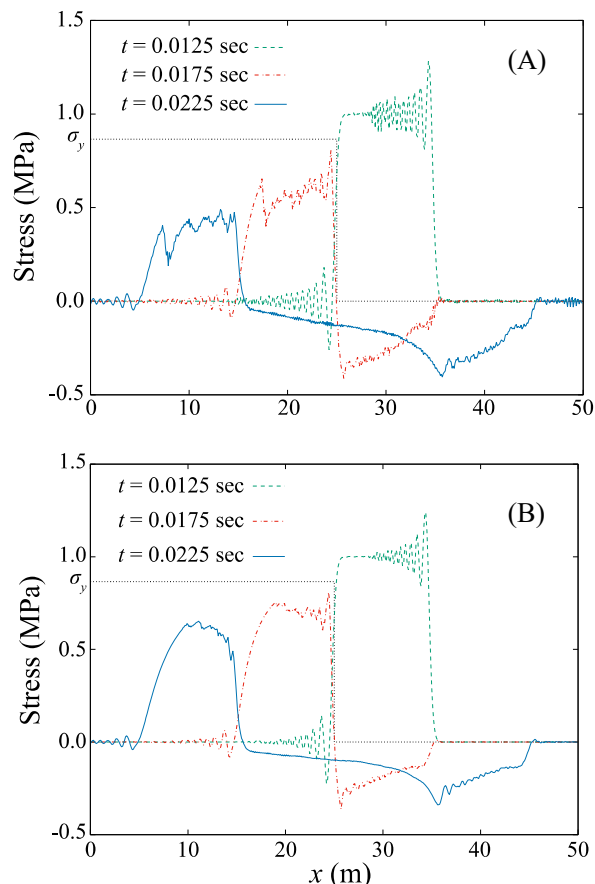


図 5 応力の時間応答 (A : Original, B : $\alpha=0.2$)
Fig.5 Computed stress field (A : Original, B : $\alpha=0.2$)